$\boxed{1}$　　問題のページへ

(1)　x は有理数より, $p\,(>0)$, q を互いに素な整数として, $x=\dfrac{q}{p}$ とおくことができ,

$$7x^2=\frac{7q^2}{p^2}$$

条件より, $7x^2$ は整数なので, p^2 は $7q^2$ の約数である。

ところが, p と q は互いに素なので, p^2 と q^2 も互いに素であり, p^2 は素数 7 の約数, すなわち $p^2=1$ または $p^2=7$ である。

すると, p は自然数より, $p=1$ となり, つまり x は整数である。

(2)　k, l を整数とし, a, b を偶数, 奇数に分けて考える。

(i)　$a=2k$, $b=2l$ のとき

$$a^2-7b^2=(2k)^2-7(2l)^2=4(k^2-7l^2)$$

(ii)　$a=2k$, $b=2l+1$ のとき

$$a^2-7b^2=(2k)^2-7(2l+1)^2=4(k^2-7l^2-7l-2)+1$$

(iii)　$a=2k+1$, $b=2l$ のとき

$$a^2-7b^2=(2k+1)^2-7(2l)^2=4(k^2+k-7l^2)+1$$

(iv)　$a=2k+1$, $b=2l+1$ のとき

$$a^2-7b^2=(2k+1)^2-7(2l+1)^2=4(k^2+k-7l^2-7l-2)+2$$

(i)～(iv)より, a^2-7b^2 が 4 の倍数ならば, a と b はともに偶数である。

(3)　$\left(\dfrac{r}{2}\right)^2-7s^2=\dfrac{r^2-7(2s)^2}{4}$ が整数のとき, $r^2-7(2s)^2$ は 4 の倍数となり, しかも r が整数より, $7(2s)^2$ は整数となる。

すると, s は有理数なので, (1)から, $2s$ は整数である。

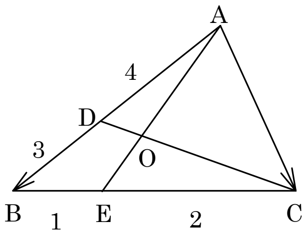
そこで, (2)の結果を用いると, r と $2s$ はともに偶数となることより, s は整数である。

[解　説]

(1)と(2)が, (3)の巧みな誘導となっています。演習するに価値ある 1 題です。

2

問題のページへ



(1)　$\triangle$ABE と直線 CD に対して，メネラウスの定理を適用すると，

$$\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}}\cdot\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{CE}}\cdot\frac{\mathrm{EO}}{\mathrm{OA}}=1,\quad \frac{\mathrm{EO}}{\mathrm{OA}}=\frac{\mathrm{DB}}{\mathrm{AD}}\cdot\frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{BC}}=\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{2}$$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{AO}}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ となり，

$$\overrightarrow{\mathrm{AO}}=\frac{2}{3}\cdot\frac{2\vec{p}+\vec{q}}{3}=\frac{4}{9}\vec{p}+\frac{2}{9}\vec{q}$$

(2)　まず，$\overrightarrow{\mathrm{BO}}=\overrightarrow{\mathrm{AO}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\dfrac{4}{9}\vec{p}+\dfrac{2}{9}\vec{q}-\vec{p}=-\dfrac{5}{9}\vec{p}+\dfrac{2}{9}\vec{q}$

$$\overrightarrow{\mathrm{CO}}=\overrightarrow{\mathrm{AO}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\frac{4}{9}\vec{p}+\frac{2}{9}\vec{q}-\vec{q}=\frac{4}{9}\vec{p}-\frac{7}{9}\vec{q}$$

条件より，点 O は$\triangle$ABC の外心なので，$|\overrightarrow{\mathrm{AO}}|=|\overrightarrow{\mathrm{BO}}|$，$|\overrightarrow{\mathrm{AO}}|=|\overrightarrow{\mathrm{CO}}|$

$$|4\vec{p}+2\vec{q}|=|-5\vec{p}+2\vec{q}|\cdots\cdots①,\quad |4\vec{p}+2\vec{q}|=|4\vec{p}-7\vec{q}|\cdots\cdots②$$

①より，$16|\vec{p}|^2+16\vec{p}\cdot\vec{q}+4|\vec{q}|^2=25|\vec{p}|^2-20\vec{p}\cdot\vec{q}+4|\vec{q}|^2$，$|\vec{p}|^2=4\vec{p}\cdot\vec{q}$

②より，$16|\vec{p}|^2+16\vec{p}\cdot\vec{q}+4|\vec{q}|^2=16|\vec{p}|^2-56\vec{p}\cdot\vec{q}+49|\vec{q}|^2$，$5|\vec{q}|^2=8\vec{p}\cdot\vec{q}$

さて，$\vec{p}\cdot\vec{q}=k$ とおくと，$\mathrm{AB}^2=|\vec{p}|^2=4k$，$\mathrm{CA}^2=|\vec{q}|^2=\dfrac{8}{5}k$ となり，

$$\mathrm{BC}^2=|\vec{p}-\vec{q}|^2=4k-2k+\frac{8}{5}k=\frac{18}{5}k$$

よって，$\mathrm{AB}^2:\mathrm{BC}^2:\mathrm{CA}^2=4k:\dfrac{18}{5}k:\dfrac{8}{5}k=10:9:4$

[解 説]

平面ベクトルの三角形への応用についての基本問題です。

3

問題のページへ

(1) 題意の値 X について, $X \leqq k$ となる場合は次の 2 通りである。

(i) 記録した値がすべて k 以下のとき

このとき, k^3 通りの場合がある。

(ii) 記録した値の 1 つが k より大, 他の 2 つが k 以下のとき

このとき, ${}_3\mathrm{C}_1(n-k)k^2 = 3(n-k)k^2$ 通りの場合がある。

(i)(ii)より, $P(X \leqq k) = \dfrac{k^3 + 3(n-k)k^2}{n^3} = \dfrac{k^2(-2k+3n)}{n^3}$ （$k = n$ のときも成立）

(2) (i) $k = 1$ のとき

$$P(X = 1) = P(X \leqq 1) = \frac{3n-2}{n^3}$$

(ii) $k \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} P(X = k) &= P(X \leqq k) - P(X \leqq k-1) \\ &= \frac{k^2(-2k+3n)}{n^3} - \frac{(k-1)^2\{-2(k-1)+3n\}}{n^3} \\ &= \frac{-6k^2 + 6(n+1)k - 3n - 2}{n^3} \cdots\cdots\cdots (*) \end{aligned}$$

なお, (*)に $k = 1$ を代入すると, $\dfrac{3n-2}{n^3}$ となり, 成立する。

(i)(ii)より, $P(X = k) = \dfrac{-6k^2 + 6(n+1)k - 3n - 2}{n^3}$

(3) (2)より, $P(X = k) = \left\{-6\left(k - \dfrac{n+1}{2}\right)^2 + \dfrac{3n^2-1}{2}\right\}\left(\dfrac{1}{n}\right)^3$

(i) n が奇数のとき

$P(X = k)$ が最大となるのは, $k = \dfrac{n+1}{2}$ のときである。

(ii) n が偶数のとき

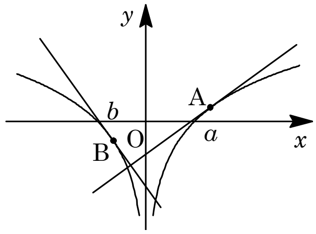
$P(X = k)$ が最大となるのは, $k = \dfrac{n}{2}$, $\dfrac{n}{2} + 1$ のときである。

[解 説]

(1)は, 問題文の流れに沿って立式すること可能ですが, 出題者の意図は上の解のように, 題意を読み替えることでしょう。

$\boxed{4}$

問題のページへ



(1)　$G: y=\log|x|$ に対し，$y'=\dfrac{1}{x}$ となる。

ここで，$\mathrm{A}(a,\ \log|a|)$，$\mathrm{B}(b,\ \log|b|)$ における接線が直交することより，

$$\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}=-1,\ ab=-1\cdots\cdots\cdots①$$

(2)　$a>0$ なので，①から $b<0$ であり，$\mathrm{A}(a,\ \log a)$，$\mathrm{B}(b,\ \log(-b))$ となる。

さて，線分 AB の中点を $\mathrm{M}(x,\ y)$ とおくと，

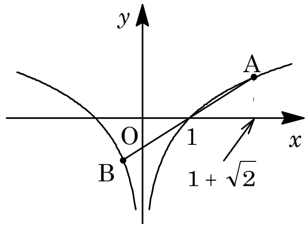
$$x=\frac{a+b}{2},\ y=\frac{\log a+\log(-b)}{2}=\frac{\log(-ab)}{2}$$

①より，$y=\dfrac{\log 1}{2}=0$ となり，$x=\dfrac{1}{2}\left(a-\dfrac{1}{a}\right)$ から，x は任意の値をとりうる。

以上より，中点 M の存在範囲は, x 軸全体である。

(3)　直線 AB が点 $(1,\ 0)$ を通り，$a\neq 1$ であるので, (2)より，$\mathrm{M}(1,\ 0)$ となり，

$$\frac{a+b}{2}=1,\ b=2-a\cdots\cdots\cdots②$$



①②より，$a(2-a)=-1$，$a^2-2a-1=0$

$a>0$ より，$a=1+\sqrt{2}$

すると，直線 AB と G で囲まれる図形の面積 S は,

$$S=\int_1^{1+\sqrt{2}}\log x\,dx-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\log(1+\sqrt{2})$$

$$=\Big[x\log x-x\Big]_1^{1+\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2}}{2}\log(1+\sqrt{2})=\frac{2+\sqrt{2}}{2}\log(1+\sqrt{2})-\sqrt{2}$$

[解 説]

微積分の標準的な問題です。(3)は(2)の結果を利用しなくても構いませんが, 計算量が少し増加します。

5

問題のページへ

(1)　$A=\begin{pmatrix}\cos 30^\circ & -\sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ\end{pmatrix}$より, Aは原点まわりに30°の回転を表す行列である。

これより，$A^m=E$となる最小の自然数mは，$m=\dfrac{360}{30}=12$である。

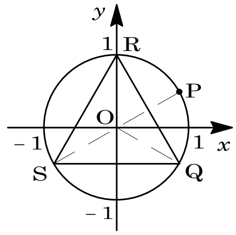
また，$B=\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix}$は, x軸に関する対称移動を表す行列である。

これより，$B^n=E$となる最小の自然数nは，$n=2$である。

(2)　A^2，A^kは，それぞれ原点まわりに60°，$30^\circ\times k$の回転を表す行列である。
ここで，$0^\circ \leqq \theta < 360^\circ$として，$\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$とおくと，

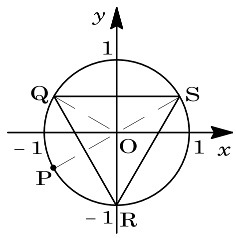
$\mathrm{Q}(\cos(-\theta),\ \sin(-\theta))$，$\mathrm{R}(\cos(\theta+60^\circ),\ \sin(\theta+60^\circ))$

条件より，$\triangle\mathrm{QRS}$が正三角形となるので，$\angle\mathrm{QOR}=120^\circ$となり, lを整数として,



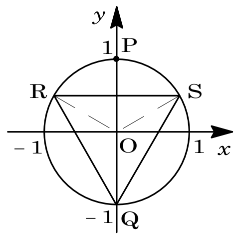
(i)　$\theta+60^\circ=-\theta+120^\circ+360^\circ\times l\ (\theta=30^\circ+180^\circ\times l)$のとき
$0^\circ \leqq \theta < 360^\circ$より，$\theta=30^\circ$，$210^\circ$である。

$\theta=30^\circ$のとき，$\mathrm{P}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$，$\mathrm{S}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ -\dfrac{1}{2}\right)$となり，点Sは P を$180^\circ=30^\circ\times 6$回転した点より，$k=6$である。



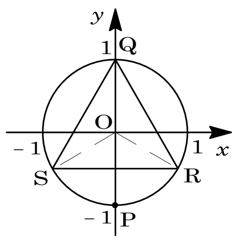
$\theta=210^\circ$のとき，$\mathrm{P}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ -\dfrac{1}{2}\right)$，$\mathrm{S}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$となり，点 S は P を$180^\circ=30^\circ\times 6$回転した点より，$k=6$である。

(ii)　$\theta+60^\circ=-\theta+240^\circ+360^\circ\times l\ (\theta=90^\circ+180^\circ\times l)$のとき
$0^\circ \leqq \theta < 360^\circ$より，$\theta=90^\circ$，$270^\circ$である。



$\theta=90^\circ$のとき，$\mathrm{P}(0,\ 1)$，$\mathrm{S}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$となり，点 S は P を$300^\circ=30^\circ\times 10$回転した点より，$k=10$である。

$\theta=270^\circ$のとき，$\mathrm{P}(0,\ -1)$，$\mathrm{S}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ -\dfrac{1}{2}\right)$となり，点 S は P を$300^\circ=30^\circ\times 10$回転した点より，$k=10$である。



(i)(ii)より，求めるk, Pの組は,

$k=6$のとき，$\mathrm{P}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$または$\mathrm{P}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ -\dfrac{1}{2}\right)$

$k=10$のとき，$\mathrm{P}(0,\ 1)$または$\mathrm{P}(0,\ -1)$

[解 説]

回転行列に関する問題です。図を描いて, 考えをまとめながら解いていくことがポイントとなっています。