

1

問題のページへ

- (1) 取り出されたカードに書かれた 4 個の数の和を Y , 取り出されなかったカードに書かれた 3 個の数の和を Z とおくと,

$$Y + Z = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7, \quad Y + Z = 28$$

$$\text{条件より, } X = Y - Z = (28 - Z) - Z = 28 - 2Z$$

さて, 7 枚のカードから, 取り出されない 3 枚のカードを選ぶ場合は ${}_7C_3$ 通りあり, これらは同様に確からしい。

ここで, $X = 28 - 2Z = -8$ のとき, $Z = 18$ となり, 取り出されなかったカードに書かれた 3 個の数は (5, 6, 7) のみである。

よって, $X = -8$ となる確率は $\frac{1}{{}_7C_3} = \frac{1}{35}$ となる。

- (2) $1 + 2 + 3 < Z < 5 + 6 + 7$ より $6 < Z < 18$ である。

さて, $X = 28 - 2Z < 0$ となるのは $Z > 14$ より, $Z = 15, 16, 17, 18$

(i) $Z = 18$ のとき (1) より 1 通り

(ii) $Z = 17$ のとき (4, 6, 7) より 1 通り

(iii) $Z = 16$ のとき (3, 6, 7), (4, 5, 7) より 2 通り

(iv) $Z = 15$ のとき (2, 6, 7), (3, 5, 7), (4, 5, 6) より 3 通り

よって, $X < 0$ となる確率は, $\frac{1+1+2+3}{{}_7C_3} = \frac{1}{5}$ となる。

- (3) X の期待値を $E(X)$ と表すと,

$$E(X) = E(28 - 2Z) = 28 - 2E(Z)$$

さて, 取り出されない 3 枚のカードに書かれた数の和の期待値 $E(Z)$ は,

$$E(Z) = (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7) \times \frac{1}{7} \times 3 = 12$$

よって, $E(X) = 28 - 2 \times 12 = 4$

[解 説]

取り出されたカードよりは, 取り出されなかったカードに注目した方が簡単です。また, (3) ではすべての事象を網羅する代わりに, 範囲外ですが, 数 C 範囲の知識を利用しました。

2

問題のページへ

(1) $n^2 - 1 = (n-1)(n+1)$ より, n が奇数のとき, $n-1, n+1$ は連続する偶数となり, 一方は 4 の倍数, もう一方は 4 の倍数でない偶数である。

よって, $n^2 - 1$ は 8 の倍数である。

(2) $n^5 - n = (n-1)n(n+1)(n^2 + 1)$ より, $n-1, n, n+1$ は連続する 3 つの整数なので, いずれか 1 つは 3 の倍数である。

よって, $n^5 - n$ は 3 の倍数である。

$$\begin{aligned} (3) \quad n^5 - n &= (n-1)n(n+1)(n^2 + 1) = (n-1)n(n+1)(n^2 - 4 + 5) \\ &= (n-1)n(n+1)\{(n+2)(n-2) + 5\} \\ &= (n-2)(n-1)n(n+1)(n+2) + 5(n-1)n(n+1) \end{aligned}$$

これより, $n-2, n-1, n, n+1, n+2$ は連続する 5 つの整数なので, いずれか 1 つは 5 の倍数である。また, $5(n-1)n(n+1)$ は 5 の倍数である。

よって, $n^5 - n$ は 5 の倍数となる。

そこで, (1) から $n^5 - n = (n^2 - 1)n(n^2 + 1)$ は 8 の倍数, (2) から $n^5 - n$ は 3 の倍数であることを考え合わせると, 8, 3, 5 が互いに素より, $n^5 - n$ は $8 \times 3 \times 5 = 120$ の倍数となる。

[解 説]

(3) では, n を 5 で割った余りで場合分けをする解法もあります。しかし, 記述量が多くなるため, (2) をヒントに式変形を考えたのが上の解です。

3

問題のページへ

$$f(x) = \int_{x-2}^{x+2} |y(y-5)| dy \quad (x > 2) \text{ に対して,}$$

(i) $2 < x < 3$ のとき

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{x-2}^{x+2} -y(y-5) dy = \int_{x-2}^{x+2} (-y^2 + 5y) dy = \left[-\frac{y^3}{3} + \frac{5}{2}y^2 \right]_{x-2}^{x+2} \\ &= -\frac{1}{3} \left\{ (x+2)^3 - (x-2)^3 \right\} + \frac{5}{2} \left\{ (x+2)^2 - (x-2)^2 \right\} \\ &= -4x^2 + 20x - \frac{16}{3} = -4 \left(x - \frac{5}{2} \right)^2 + \frac{59}{3} \end{aligned}$$

これより、最小値は $f(2) = \frac{56}{3}$ となる。(ii) $3 < x < 7$ のとき

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{x-2}^5 -y(y-5) dy + \int_5^{x+2} y(y-5) dy \\ &= \left[-\frac{y^3}{3} + \frac{5}{2}y^2 \right]_{x-2}^5 + \left[\frac{y^3}{3} - \frac{5}{2}y^2 \right]_5^{x+2} \end{aligned}$$

$$\text{ここで, } \left[-\frac{y^3}{3} + \frac{5}{2}y^2 \right]_{x-2}^5 = -\frac{1}{3} \left\{ 125 - (x-2)^3 \right\} + \frac{5}{2} \left\{ 25 - (x-2)^2 \right\}$$

$$\left[\frac{y^3}{3} - \frac{5}{2}y^2 \right]_5^{x+2} = \frac{1}{3} \left\{ (x+2)^3 - 125 \right\} - \frac{5}{2} \left\{ (x+2)^2 - 25 \right\}$$

$$\text{よって, } f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 5x^2 + 8x + \frac{65}{3}$$

$$f'(x) = 2x^2 - 10x + 8 = 2(x-1)(x-4)$$

右表より、最小値は $f(4) = \frac{49}{3}$ となる。

x	3	...	4	...	7
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$		↘		↗	

(iii) $7 < x$ のとき

$$f(x) = \int_{x-2}^{x+2} y(y-5) dy = 4 \left(x - \frac{5}{2} \right)^2 - \frac{59}{3}$$

これより、最小値は $f(7) = \frac{184}{3}$ となる。(i) ~ (iii)より、 $f(x)$ は連続関数なので、その最小値は $f(4) = \frac{49}{3}$ である。

[解 説]

絶対値のついた関数を積分する頻出問題です。ミスなく計算するだけですが、計算量は多めです。

4

問題のページへ

(1) $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}\log|x| + \frac{3}{4}$ に対して, $f'(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2x} = \frac{x^2+1}{2x}$

さて, 接点の x 座標を $x = \alpha, \beta (\alpha < \beta)$ とおくと, 接線の傾きはそれぞれ $f'(\alpha), f'(\beta)$ なので, 2 接線が互いに垂直である条件は,

$$f'(\alpha) \cdot f'(\beta) = \frac{\alpha^2+1}{2\alpha} \cdot \frac{\beta^2+1}{2\beta} = -1$$

これより, $(\alpha^2+1)(\beta^2+1) = -4\alpha\beta, \alpha^2\beta^2 + \alpha^2 + \beta^2 + 1 + 4\alpha\beta = 0$

$$(\alpha\beta+1)^2 + (\alpha+\beta)^2 = 0$$

すると, $\alpha\beta+1=0$ かつ $\alpha+\beta=0$ より, $\alpha=-1, \beta=1$ となる。

$\alpha=-1$ のとき, $f'(-1)=-1, f(-1)=1$ より, 接線の方程式は,

$$y-1 = -(x+1), y = -x$$

$\beta=1$ のとき, $f'(1)=1, f(1)=1$ より, 接線の方程式は,

$$y-1 = x-1, y = x$$

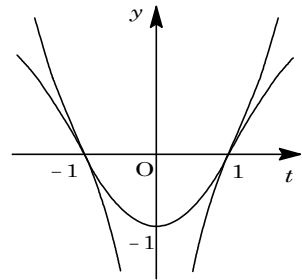
(2) 接点を $(t, f(t))$ とおくと, 接線の方程式は, $y - f(t) = f'(t)(x - t)$

原点を通ることより, $-f(t) = f'(t)(-t)$

$$-\frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{2}\log|t| - \frac{3}{4} = \frac{t^2+1}{2t} \cdot (-t)$$

$$t^2 + 2\log|t| + 3 = 2(t^2 + 1)$$

$$t^2 - 1 = 2\log|t| \dots\dots (*)$$



すると, 右図より, (*) の解は $t = \pm 1$ となり, (1) から傾きが正となる接線 l の方程式は $y = x$ である。

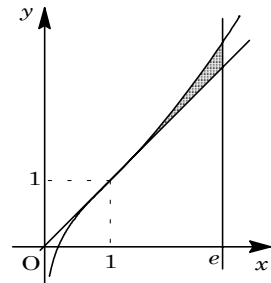
(3) $f''(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2x^2} = \frac{x^2-1}{2x^2}$ より, $x > 0$ において, 曲線

$y = f(x)$ の概形は右図のようになる。

すると, 曲線 $y = f(x)$ と 2 直線 $x = e, y = x$ で囲まれた図形の面積 S は,

x	0	...	1	...
$f'(x)$	\times	+		+
$f''(x)$	\times	-	0	+
$f(x)$	\times	\curvearrowright	1	\curvearrowleft

$$\begin{aligned} S &= \int_1^e \left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}\log x + \frac{3}{4} - x \right) dx \\ &= \left[\frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{2}(x \log x - x) + \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}x^2 \right]_1^e \\ &= \frac{1}{12}(e^3 - 1) + \frac{1}{2}e + \frac{1}{4}(e - 1) - \frac{1}{2}(e^2 - 1) \\ &= \frac{1}{12}e^3 - \frac{1}{2}e^2 + \frac{3}{4}e + \frac{1}{6} \end{aligned}$$



[解説]

(1) で, α, β の値が求まるだろうかという懸念は杞憂に過ぎませんでした。

5

問題のページへ

(1) $y = \cos^2 \theta \cdot \tan \frac{\theta}{2}$ より,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{d\theta} &= 2 \cos \theta (-\sin \theta) \tan \frac{\theta}{2} + \cos^2 \theta \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{\theta}{2}} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{\cos \theta}{2 \cos^2 \frac{\theta}{2}} \left(-4 \sin \theta \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} + \cos \theta \right) = -\frac{\cos \theta}{2 \cos^2 \frac{\theta}{2}} (2 \sin^2 \theta - \cos \theta) \\ &= \frac{\cos \theta}{2 \cos^2 \frac{\theta}{2}} (2 \cos^2 \theta + \cos \theta - 2) \end{aligned}$$

ここで, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ において, $\frac{dy}{d\theta} = 0$ とすると, $2 \cos^2 \theta + \cos \theta - 2 = 0$ より,

$$\cos \theta = \frac{-1 + \sqrt{17}}{4}$$

ここで, $\cos \theta_1 = \frac{-1 + \sqrt{17}}{4}$ とおくと, 右表より

$\theta = \theta_1$ のとき y は最大となる。

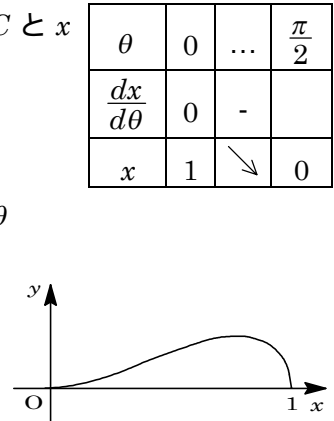
よって, $\cos \alpha = \frac{-1 + \sqrt{17}}{4}$ である。

θ	0	...	θ_1	...	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{dy}{d\theta}$		+	0	-	0
y	0	↗		↘	0

(2) $x = \cos \theta$ より, $\frac{dx}{d\theta} = -\sin \theta$

よって, 曲線 C の概形は右下図のようになり, 曲線 C と x 軸で囲まれた図形の面積 S は,

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 y dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos^2 \theta \tan \frac{\theta}{2} (-\sin \theta) d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \cos^2 \theta \sin^2 \frac{\theta}{2} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta (1 - \cos \theta) d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 \theta) \cos \theta d\theta \\ &= \frac{1}{2} \left[\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[\sin \theta - \frac{1}{3} \sin^3 \theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} - 1 + \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{3} \end{aligned}$$



[解 説]

微積分の出題が 3 題続きます。内容は標準的なパラメータ積分ですが, 計算量はかなりのものです。