1

問題のページへ

(1)　$X=3$ となるのは，取り出された 3 枚のカードが，1 と 2，および 3 以上が 1 枚の場合なので，その確率は，

$$\frac{10-2}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\frac{8}{120}=\frac{1}{15}$$

(2)　3 枚のカードに書かれた 3 つの整数を a，b，c（$a<b<c$）とおき，$b=k$ のときの $a+b$ の期待値を E_k とすると，

$$E_k=\{(1+k)+(2+k)+\cdots+(k-1+k)\}\cdot\frac{10-k}{{}_{10}\mathrm{C}_3}$$
$$=\frac{(1+k+k-1+k)(k-1)}{2}\cdot\frac{10-k}{120}=\frac{1}{80}k(k-1)(10-k)$$

すると, X の期待値 E は, $2\leqq k\leqq 9$ から,

$$E=\frac{1}{80}\sum_{k=2}^{9}k(k-1)(10-k)=\frac{1}{80}\sum_{k=1}^{9}k(k-1)(10-k)$$
$$=\frac{1}{80}\sum_{k=1}^{9}(-k^3+11k^2-10k)$$
$$=\frac{1}{80}\left(-\frac{1}{4}\cdot 9^2\cdot 10^2+11\cdot\frac{1}{6}\cdot 9\cdot 10\cdot 19-10\cdot\frac{1}{2}\cdot 9\cdot 10\right)$$
$$=\frac{33}{4}$$

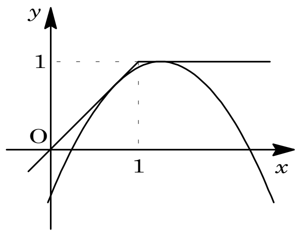
[解 説]

(2)を(1)の続きとして考え，$X=4$，5，…，17 の確率を順に求めていくという見方もできます。しかし，これは大変なので，アプローチの方法を変更しました。

2

問題のページへ

(1)　$y=g(x)$ のグラフが $y=f(x)$ のグラフと 2 点で接することより, $p>1$ として,



$$g(x)=-(x-p)^2+1$$

すると，$y=g(x)$ のグラフと直線 $y=x$ との共有点は,

$$x=-(x-p)^2+1,\quad x^2-(2p-1)x+p^2-1=0$$

$x<1$ において接することより,

$$D=(2p-1)^2-4(p^2-1)=0\cdots\cdots\cdots①$$

$$x=\frac{2p-1}{2}<1\cdots\cdots\cdots②$$

①より，$1-4p+4=0$，$p=\dfrac{5}{4}$

この値は $p>1$ を満たし，しかも②は $x=\dfrac{3}{4}<1$ となり，成立しているので,

$$g(x)=-\left(x-\frac{5}{4}\right)^2+1=-x^2+\frac{5}{2}x-\frac{9}{16}$$

よって，$a=\dfrac{5}{2}$，$b=-\dfrac{9}{16}$

(2)　$x<1$ における接点は②より $x=\dfrac{3}{4}$，$x>1$ における接点は $x=p=\dfrac{5}{4}$ から,

$y=f(x)$ と $y=g(x)$ のグラフで囲まれる部分の面積 S は,

$$S=\int_{\frac{3}{4}}^{1}\left\{x-\left(-x^2+\frac{5}{2}x-\frac{9}{16}\right)\right\}dx+\int_{1}^{\frac{5}{4}}\left\{1-\left(-x^2+\frac{5}{2}x-\frac{9}{16}\right)\right\}dx$$

$$=\int_{\frac{3}{4}}^{1}\left(x-\frac{3}{4}\right)^2dx+\int_{1}^{\frac{5}{4}}\left(x-\frac{5}{4}\right)^2dx=\frac{1}{3}\left[\left(x-\frac{3}{4}\right)^3\right]_{\frac{3}{4}}^{1}+\frac{1}{3}\left[\left(x-\frac{5}{4}\right)^3\right]_{1}^{\frac{5}{4}}$$

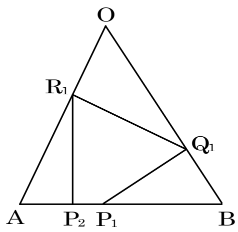
$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^3-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{4}\right)^3=\frac{1}{96}$$

[解 説]

微積分の基本問題です。$y=f(x)$ のグラフが複雑ではないので，直感に依存した解となっています。

3

問題のページへ



(1)　条件より，$\overrightarrow{\mathrm{AP_1}}=t_1(\vec{b}-\vec{a})$なので，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP_1}}=\vec{a}+t_1(\vec{b}-\vec{a})=(1-t_1)\vec{a}+t_1\vec{b}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OQ_1}}$は$\overrightarrow{\mathrm{OP_1}}$の$\vec{b}$方向への正射影ベクトルより，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ_1}}=\left(\overrightarrow{\mathrm{OP_1}}\cdot\frac{\vec{b}}{\sqrt{3}}\right)\frac{\vec{b}}{\sqrt{3}}=\frac{1}{3}\{(1-t_1)\vec{a}\cdot\vec{b}+t_1|\vec{b}|^2\}\vec{b}$$

ここで，$|\vec{a}|=\sqrt{2}$，$|\vec{b}|=\sqrt{3}$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=1$から，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ_1}}=\frac{1}{3}(1-t_1+3t_1)\vec{b}=\frac{1}{3}(2t_1+1)\vec{b}$$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{BQ_1}}=\frac{1}{3}(2t_1+1)\vec{b}-\vec{b}=\frac{2}{3}(t_1-1)\vec{b}$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OR_1}}$は$\overrightarrow{\mathrm{OQ_1}}$の$\vec{a}$方向への正射影ベクトルより，

$$\overrightarrow{\mathrm{OR_1}}=\left(\overrightarrow{\mathrm{OQ_1}}\cdot\frac{\vec{a}}{\sqrt{2}}\right)\frac{\vec{a}}{\sqrt{2}}=\frac{1}{6}\{(2t_1+1)\vec{a}\cdot\vec{b}\}\vec{a}=\frac{1}{6}(2t_1+1)\vec{a}$$

さて，$\overrightarrow{\mathrm{AP_2}}=t_2(\vec{b}-\vec{a})$から，$\overrightarrow{\mathrm{OP_2}}=(1-t_2)\vec{a}+t_2\vec{b}$となり，

$$\overrightarrow{\mathrm{R_1P_2}}=\left(1-t_2-\frac{1}{3}t_1-\frac{1}{6}\right)\vec{a}+t_2\vec{b}=\left(\frac{5}{6}-\frac{1}{3}t_1-t_2\right)\vec{a}+t_2\vec{b}$$

ここで，$\mathrm{R_1P_2}$と AB は垂直なので，$\overrightarrow{\mathrm{R_1P_2}}\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0$より，

$$\left(\frac{5}{6}-\frac{1}{3}t_1-t_2\right)|\vec{a}|^2+\left(t_2-\frac{5}{6}+\frac{1}{3}t_1+t_2\right)\vec{a}\cdot\vec{b}-t_2|\vec{b}|^2=0$$

よって，$2\left(\frac{5}{6}-\frac{1}{3}t_1-t_2\right)+\left(2t_2-\frac{5}{6}+\frac{1}{3}t_1\right)-3t_2=0$から，$t_2=-\frac{1}{9}t_1+\frac{5}{18}$

(3)　(2)と同様にすると，$t_{n+1}=-\frac{1}{9}t_n+\frac{5}{18}$から，$t_{n+1}-\frac{1}{4}=-\frac{1}{9}\left(t_n-\frac{1}{4}\right)$

$$t_n-\frac{1}{4}=\left(t_1-\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{1}{9}\right)^{n-1},\quad t_n=\left(t_1-\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{1}{9}\right)^{n-1}+\frac{1}{4}$$

(4)　$\mathrm{P_1}=\mathrm{P_2}$から$t_1=t_2$となり，(2)から$t_1=-\frac{1}{9}t_1+\frac{5}{18}$なので，$t_1=\frac{1}{4}$である。

(5)　$t_1=\frac{1}{4}$より，$\overrightarrow{\mathrm{OQ_1}}=\frac{1}{3}\left(2\cdot\frac{1}{4}+1\right)\vec{b}=\frac{1}{2}\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OR_1}}=\frac{1}{6}\left(2\cdot\frac{1}{4}+1\right)\vec{a}=\frac{1}{4}\vec{a}$

よって，$\mathrm{P_1}$は AB を$1:3$，$\mathrm{R_1}$は OA を$1:3$に内分し，$\mathrm{Q_1}$は AB の中点から，

$$\triangle\mathrm{P_1Q_1R_1}=\left(1-\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}-\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\right)\triangle\mathrm{OAB}=\frac{5}{16}\triangle\mathrm{OAB}$$

さて，$\triangle\mathrm{OAB}=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{2\times3-1^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$より，

$$\triangle\mathrm{P_1Q_1R_1}=\frac{5}{16}\times\frac{\sqrt{5}}{2}=\frac{5\sqrt{5}}{32}$$

[解 説]

難問というわけではありませんが，設問が 5 つもあるため，かなりの時間を費やしてしまいます。

4　　　　問題のページへ

(1)　$f(x)=a\cos^2 x+b\cos x+c$ に対して，

$$f'(x)=-2a\cos x\sin x-b\sin x=-\sin x(2a\cos x+b)$$

$y=f(x)$ のグラフが x 軸と原点で接しているので，$f(0)=f'(0)=0$ より，

$$a+b+c=0,\ c=-a-b\ \cdots\cdots\cdots①$$

このとき，$f(x)=a\cos^2 x+b\cos x-a-b=(\cos x-1)(a\cos x+a+b)$

さて，$y=f(x)$ のグラフが x 軸と $x=t$ で接するとすると，$f(t)=f'(t)=0$ より，

$$(\cos t-1)(a\cos t+a+b)=0\ \cdots\cdots②,\ \sin t(2a\cos t+b)=0\ \cdots\cdots③$$

②より $\cos t=1$ または $\cos t=-\dfrac{a+b}{a}$，③より $\sin t=0$ または $\cos t=-\dfrac{b}{2a}$ となる。

(i)　$\cos t=1$，$\sin t=0$ のとき　n を整数として，$t=2n\pi$ である。

(ii)　$\cos t=1$，$\cos t=-\dfrac{b}{2a}$ のとき

$-\dfrac{b}{2a}=1$ すなわち $b=-2a$ の場合には，$t=2n\pi$ （n は整数）である。

(iii)　$\cos t=-\dfrac{a+b}{a}$，$\sin t=0$ のとき

$\sin t=0$ より $\cos t=\pm1$ であり，$-\dfrac{a+b}{a}=\pm1$ となる。

まず，$-\dfrac{a+b}{a}=1$ すなわち $b=-2a$ の場合には，$t=2n\pi$ （n は整数）である。

また，$-\dfrac{a+b}{a}=-1$ の場合には $b=0$ となり，$b\neq0$ という条件に反する。

(iv)　$\cos t=-\dfrac{a+b}{a}$，$\cos t=-\dfrac{b}{2a}$ のとき

$-\dfrac{a+b}{a}=-\dfrac{b}{2a}$ すなわち $b=-2a$ の場合には，$\cos t=1$ となる。

よって，$t=2n\pi$ （n は整数）である。

(i)～(iv)より，$y=f(x)$ のグラフと x 軸との接点は，$x=2n\pi$ （n は整数）である。

(2)　$\displaystyle\int_0^{2\pi}f(x)\,dx=0$ より，$\displaystyle\int_0^{2\pi}\left(a\cdot\frac{1+\cos 2x}{2}+b\cos x+c\right)dx=0$ となり，

$$\frac{a}{2}\cdot2\pi+c\cdot2\pi=0,\ c=-\frac{a}{2}\ \cdots\cdots\cdots④$$

①④より，$f(x)=(\cos x-1)(a\cos x-c)=a(\cos x-1)\left(\cos x+\dfrac{1}{2}\right)$

よって，$f(x)=0\ (0\leqq x\leqq2\pi)$ の解は，$x=0,\ \dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{4}{3}\pi,\ 2\pi$ となる。

[解 説]

微積分の計算問題です。計算量は多めです。

5　　問題のページへ

(1)　$C: x^2+y^2-4-t(2x+2y-a)=0$ より，

$$(x-t)^2+(y-t)^2=2t^2-at+4 \cdots\cdots\cdots ①$$

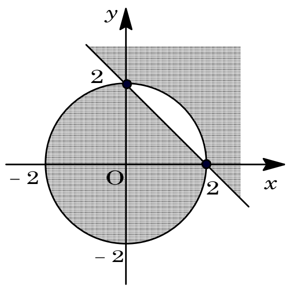
①が円を表す条件 $2t^2-at+4>0$ が，すべての t に対して成立するためには，

$$D=a^2-32<0,\ -4\sqrt{2}<a<4\sqrt{2}$$

(2)　$a=4$ のとき，$C: x^2+y^2-4-t(2x+2y-4)=0 \cdots\cdots\cdots ②$

t が $t>0$ の範囲を動くとき，C が通過する領域は，②を t の方程式としてみたとき, $t>0$ の解をもつ条件として表される。

まず，$2x+2y-4=0 \cdots\cdots ③$のとき，$t>0$ の解をもつのは，$x^2+y^2-4=0 \cdots\cdots ④$の場合だけである。ここで，③④を連立することにより $(x,\ y)=(2,\ 0),\ (0,\ 2)$ となり，C はこの点を通過する。



次に，$2x+2y-4\neq 0$ のときは，$t=\dfrac{x^2+y^2-4}{2x+2y-4}$ となり，

$$\frac{x^2+y^2-4}{2x+2y-4}>0,\ (x^2+y^2-4)(x+y-2)>0$$

よって，C が通過する領域は右図の網点部となる。ただし，点$(2,\ 0),\ (0,\ 2)$ 以外の境界は含まない。

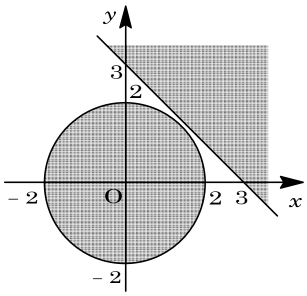
(3)　$a=6$ のとき，$C: x^2+y^2-4-t(2x+2y-6)=0 \cdots\cdots\cdots ⑤$

⑤が円を表す条件は，(1)より $2t^2-6t+4>0$ すなわち $(t-1)(t-2)>0$ であり，$t>0$ と合わせて，$0<t<1,\ 2<t \cdots\cdots(*)$となる。

まず，$2x+2y-6=0 \cdots\cdots ⑥$のとき，$t>0$ の解をもつのは，$x^2+y^2-4=0 \cdots\cdots ⑦$の場合だけである。ここで，⑥より $y=-x+3$ となり，⑦に代入すると，

$$x^2+(-x+3)^2-4=0,\ 2x^2-6x+5=0$$

しかし，$D/4=-1$ より実数解をもたず，不適である。



次に，$2x+2y-6\neq 0$ のときは，$t=\dfrac{x^2+y^2-4}{2x+2y-6}$ となり，

(*)より，

$$0<\frac{x^2+y^2-4}{2x+2y-6}<1 \cdots\cdots ⑧,\ 2<\frac{x^2+y^2-4}{2x+2y-6} \cdots\cdots ⑨$$

⑧の左側の不等式は，

$$(x^2+y^2-4)(x+y-3)>0 \cdots\cdots\cdots ⑩$$

不等式⑩を図示すると，右上図の網点部となる。ただし，境界は含まない。

⑧の右側の不等式は，$(x^2+y^2-4)(2x+2y-6)<(2x+2y-6)^2$

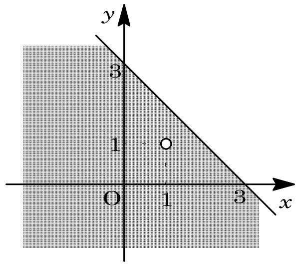
$$2(x+y-3)(x^2+y^2-4-2x-2y+6)<0$$

$$(x+y-3)\{(x-1)^2+(y-1)^2\}<0 \cdots\cdots\cdots ⑪$$

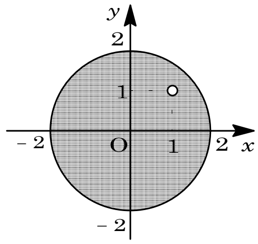
すると，$(x-1)^2+(y-1)^2 \geqq 0$ から，不等式⑪は，

$(x,\ y) \neq (1,\ 1)$　かつ　$x+y-3<0$

よって，図示すると，右図の網点部となる。ただし，境界は含まない。



まとめると，不等式⑧は，不等式⑩と⑪を連立したものであるので，その共通部分を領域として図示すると，右下図の網点部となる。ただし，境界および点$(1,\ 1)$は含まない。



さらに，⑨を変形すると，

$(x^2+y^2-4)(2x+2y-6)>2(2x+2y-6)^2$

$2(x+y-3)(x^2+y^2-4-4x-4y+12)>0$

$(x+y-3)\{(x-2)^2+(y-2)^2\}>0$ ………⑫

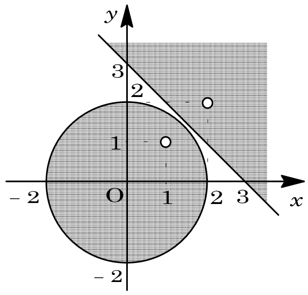
すると，$(x-2)^2+(y-2)^2 \geqq 0$ から，不等式⑫は，

$(x,\ y) \neq (2,\ 2)$　かつ　$x+y-3>0$

したがって，不等式⑨は，直線 $x+y-3=0$ の上側から，点$(2,\ 2)$を除いた領域を表す。

以上より，C が通過する領域は不等式⑧または⑨で表されるので，図示すると右図の網点部となる。

ただし，境界線および2点$(1,\ 1)$，$(2,\ 2)$は含まない。



[解 説]

記述量が多い問題です。ステップを 1 つずつ踏んで図示していくだけですが，かなりの計算力と忍耐力が要求されます。