

1

問題のページへ

- (1) $\log_{10}(-y^2 - 2xy + y + x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 1) \log_{10}(-2x^2 + 2x + 1)$ に対して、
 まず、 $-y^2 - 2xy + y + x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 1 > 0 \dots\dots\dots$
 $-2x^2 + 2x + 1 > 0 \dots\dots\dots$

のもとで、 $-y^2 - 2xy + y + x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 1 - 2x^2 + 2x + 1 \dots\dots\dots$

ここで、より、はつねに成り立つ。

を整理して、 $y^2 + (2x - 1)y - (x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x) = 0$

$$y^2 + (2x - 1)y - (x^2 - 1)(x^2 - 2x) = 0$$

$$\{y + (x^2 - 1)\} \{y - (x^2 - 2x)\} = 0 \dots\dots\dots$$

より、 $2x^2 - 2x - 1 < 0$, $\frac{1 - \sqrt{3}}{2} < x < \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$

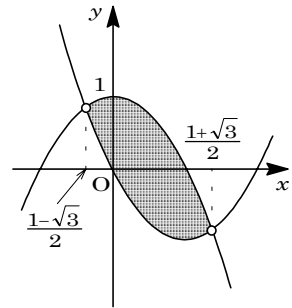
また、で表される領域の境界線の方程式は、

$$y = -x^2 + 1 \dots\dots\dots, \quad y = x^2 - 2x \dots\dots\dots$$

の共有点は、 $-x^2 + 1 = x^2 - 2x$ より、

$$2x^2 - 2x - 1 = 0, \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$$

さて、点(0, -1)はを満たさないので、かつの満たす領域は右図の網点部となる。なお、白丸以外の境界線は領域に含む。



- (2) $x + y = k \dots\dots$ とおき、直線と(1)の領域が共有点をもつ k の範囲を求める。

まず、とが接するのは、 $x + (-x^2 + 1) = k$, $x^2 - x + k - 1 = 0$

$$D = 1 - 4(k - 1) = 0, \quad k = \frac{5}{4}$$

このとき、 $x = \frac{1}{2}$ となり、 $\frac{1 - \sqrt{3}}{2} < x < \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$ を満たす。

次に、とが接するのは、 $x + (x^2 - 2x) = k$, $x^2 - x - k = 0$

$$D = 1 + 4k = 0, \quad k = -\frac{1}{4}$$

このとき、 $x = \frac{1}{2}$ となり、 $\frac{1 - \sqrt{3}}{2} < x < \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$ を満たす。

以上より、 $x + y$ の最大値は $\frac{5}{4}$ 、最小値は $-\frac{1}{4}$ である。

[解 説]

の左辺を因数分解することに、やや時間を取られることを除くと、見かけよりはるかに基本的です。

2

問題のページへ

$$0 < x < \pi \text{ において, } f(x) = 3 \cos 2x + 7 \cos x = 3(2 \cos^2 x - 1) + 7 \cos x \\ = 6 \cos^2 x + 7 \cos x - 3 = (3 \cos x - 1)(2 \cos x + 3)$$

ここで, $\cos \alpha = \frac{1}{3}$ ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$) とおくと, $0 < x < \alpha$ で $f(x) > 0$, $\alpha < x < \pi$ で $f(x) < 0$ となり,

$$I = \int_0^{\pi} |f(x)| dx = \int_0^{\alpha} f(x) dx + \int_{\alpha}^{\pi} -f(x) dx \\ = \int_0^{\alpha} (3 \cos 2x + 7 \cos x) dx - \int_{\alpha}^{\pi} (3 \cos 2x + 7 \cos x) dx \\ = \left[\frac{3}{2} \sin 2x + 7 \sin x \right]_0^{\alpha} - \left[\frac{3}{2} \sin 2x + 7 \sin x \right]_{\alpha}^{\pi} \\ = \frac{3}{2} \sin 2\alpha + 7 \sin \alpha - \frac{3}{2} (0 - \sin 2\alpha) - 7 (0 - \sin \alpha) \\ = 3 \sin 2\alpha + 14 \sin \alpha$$

そこで, $\sin \alpha = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\sin 2\alpha = 2 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4\sqrt{2}}{9}$ から,

$$I = 3 \cdot \frac{4\sqrt{2}}{9} + 14 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{32}{3} \sqrt{2}$$

[解 説]

$f(x) = 0$ となる x は求まらないので, この値を α とし, α の条件を念頭におきながら計算をすすめる問題です。

3

問題のページへ

(1) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -1 & -a-1 \end{pmatrix}$ に対して, ハミルトン・ケーリーの定理より,

$$A^2 - (a - a - 1)A + \{a(-a - 1) + b\}E = O$$

よって, $A^2 + A - (a^2 + a - b)E = O \dots\dots$ から, $A^2 = -A + (a^2 + a - b)E$ より,

$$\begin{aligned} A^3 &= A\{-A + (a^2 + a - b)E\} = -A^2 + (a^2 + a - b)A \\ &= A - (a^2 + a - b)E + (a^2 + a - b)A \\ &= (1 + a^2 + a - b)A - (a^2 + a - b)E \end{aligned}$$

条件より, $A^3 = E$ なので,

$$(1 + a^2 + a - b)A - (a^2 + a - b + 1)E = O, \quad (1 + a^2 + a - b)(A - E) = O$$

$A \neq E$ より, $1 + a^2 + a - b = 0 \dots\dots\dots$

(2) より, $A^2 + A + E = O \dots\dots\dots$

以下, すべての自然数 k に対して, $A^{2^k} + A^{2^{k-1}} + E = O$ であることを数学的帰納法を用いて証明する。

(i) $k = 1$ のとき より成り立つ。

(ii) $k = l$ のとき $A^{2^l} + A^{2^{l-1}} + E = O$ が成り立つと仮定する。

$$\begin{aligned} A^{2^{l+1}} + A^{2^l} + E &= (A^{2^l})^2 + A^{2^l} + E = (-A^{2^{l-1}} - E)^2 + A^{2^l} + E \\ &= A^{2^l} + 2A^{2^{l-1}} + E + A^{2^l} + E = 2(A^{2^l} + A^{2^{l-1}} + E) = O \end{aligned}$$

よって, $k = l + 1$ のときも成り立つ。

(i)(ii)より, すべての自然数 k に対して, $A^{2^k} + A^{2^{k-1}} + E = O$ である。

[解 説]

(2)では指数の部分がややこしいので, 指数法則についてのミスをしそうです。

4

問題のページへ

(1) $f(x) = x^a - \log x$ とおくと, $f'(x) = ax^{a-1} - \frac{1}{x} = \frac{ax^a - 1}{x}$

$f'(x) = 0$ の解は $x = \frac{1}{\sqrt[a]{a}}$ より, $f(x)$ の増減は右

x	0	...	$\frac{1}{\sqrt[a]{a}}$...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		↘		↗

表のようになる。

$$f\left(\frac{1}{\sqrt[a]{a}}\right) = \frac{1}{a} - \log a^{-\frac{1}{a}} = \frac{1}{a}(1 + \log a)$$

$$a > \frac{1}{e} \text{ から, } f\left(\frac{1}{\sqrt[a]{a}}\right) > \frac{1}{a}\left(1 + \log \frac{1}{e}\right) = \frac{1}{a}(1 - \log e) = 0$$

よって, $f(x) > 0$ から, $x^a > \log x$ である。

(2) $x = \frac{1}{t}$ とおくと, $x \rightarrow +0$ のとき $t \rightarrow \infty$ から, $\lim_{x \rightarrow +0} x^a \log x = -\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log t}{t^a}$

(1)より, $a = \frac{1}{e}$ のとき $f(x) = 0$ なので, $x^{\frac{1}{e}} \log x$ となり, $t > 1$ において,

$$\frac{\frac{1}{t^e}}{t^a} = \frac{\log t}{t^a} < 0, \quad \frac{1}{t^{\frac{a-1}{e}}} = \frac{\log t}{t^a} < 0$$

すると, $a > \frac{1}{e}$ なので, $t \rightarrow \infty$ のとき $t^{\frac{a-1}{e}} \rightarrow \infty$ から, $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log t}{t^a} = 0$ となり,

$$\lim_{x \rightarrow +0} x^a \log x = 0$$

(3) $y = x \log x$ に対して, $y' = \log x + 1$

$y' = 0$ の解は $x = \frac{1}{e}$ であり, $0 < t < \frac{1}{e}$ から,

$t \leq x \leq 1$ における増減は右表のようになり,

x	t	...	$\frac{1}{e}$...	1
y'		-	0	+	
y	$t \log t$	↘		↗	0

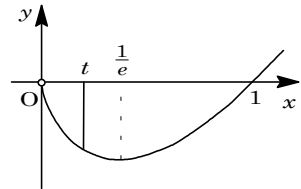
$$V(t) = \int_t^1 2\pi x (-x \log x) dx$$

$$= -2\pi \int_t^1 x^2 \log x dx$$

$$= -2\pi \left\{ \left[\frac{x^3}{3} \log x \right]_t^1 - \int_t^1 \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} dx \right\}$$

$$= 2\pi \left\{ \frac{t^3}{3} \log t + \frac{1}{3} \left[\frac{x^3}{3} \right]_t^1 \right\}$$

$$= 2\pi \left\{ \frac{t^3}{3} \log t + \frac{1}{9}(1 - t^3) \right\}$$



(2)より, $\lim_{t \rightarrow +0} t^3 \log t = 0$ なので, $\lim_{t \rightarrow +0} V(t) = \frac{2}{9}\pi$ となる。

[解説]

(1)と(2)を結び糸が曖昧なため, (2)にはかなりの時間が必要でした。

5

問題のページへ

- (1) z が原点と点 α を通る直線上の点 $\frac{\alpha}{2}$ 以外を動くとき, k を実数とし,

$$z = k\alpha \left(k \neq \frac{1}{2} \right)$$

このとき, $w = \frac{\bar{\alpha}z - 2}{2z - \alpha} = \frac{k\bar{\alpha}\alpha - 2}{2k\alpha - \alpha}$ となり, $|\alpha| = 1$ より $\alpha\bar{\alpha} = 1$ であるので,

$$w = \frac{k-2}{2k-1} \cdot \frac{1}{\alpha} = \frac{k-2}{2k-1} \bar{\alpha}$$

よって, 点 w は原点と点 $\bar{\alpha}$ を通る直線上にある。

- (2) $w = \frac{\bar{\alpha}z - 2}{2z - \alpha}$ より, $(2z - \alpha)w = \bar{\alpha}z - 2$, $(2w - \bar{\alpha})z = \alpha w - 2$ ……

ここで, $w = \frac{\alpha}{2}$ とすると, $\alpha w - 2 = \frac{\alpha\bar{\alpha}}{2} - 2 = -\frac{3}{2}$ となり, は成立しない。

よって, $w \neq \frac{\alpha}{2}$ から, $z = \frac{\alpha w - 2}{2w - \bar{\alpha}}$ ……

さて, 条件から, $|z| > 1$ なので,

$$\left| \frac{\alpha w - 2}{2w - \bar{\alpha}} \right| > 1, \quad \frac{|\alpha w - 2|}{|2w - \bar{\alpha}|} > 1, \quad |\alpha w - 2| > |2w - \bar{\alpha}|$$

$(\alpha w - 2)(\bar{\alpha}w - 2) > (2w - \bar{\alpha})(2\bar{w} - \alpha)$, $\alpha\bar{\alpha}w\bar{w} + 4 > 4w\bar{w} + \alpha\bar{\alpha}$
 $\alpha\bar{\alpha} = 1$ から, $w\bar{w} < 1$ となり, $|w| < 1$ である。

よって, 点 w は中心が原点, 半径が 1 の円の内部を動く。ただし $\frac{\alpha}{2}$ を除く。

[解 説]

複素数平面上の変換に関する基本問題です。2つの設問とも頻出です。