1

問題のページへ

(1)　$f(x)=x^3$ より $f'(x)=3x^2$ となり，$f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{3}{4}$ である。

また，$g(x)=ax^2+bx+c$ より，$g'(x)=2ax+b$ となる。

条件より，$g\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{8}$ かつ $g'\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{3}{4}$ となるので，

$$\frac{1}{4}a+\frac{1}{2}b+c=\frac{1}{8},\quad a+b=\frac{3}{4}$$

よって，$b=\dfrac{3}{4}-a$，$c=\dfrac{1}{8}-\dfrac{1}{4}a-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{4}-a\right)=-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}a$

(2)　$h(x)=f(x)-g(x)$ とおくと，(1)より，$h(x)=x^3-ax^2-\left(\dfrac{3}{4}-a\right)x+\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{4}a$

$$h'(x)=3x^2-2ax-\left(\frac{3}{4}-a\right)=\frac{1}{4}(2x-1)(6x-4a+3)$$

$h'(x)=0$ の解は，$x=\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{2}{3}a-\dfrac{1}{2}$ となり，

$$h\left(\frac{1}{2}\right)=0,\quad h\left(\frac{2}{3}a-\frac{1}{2}\right)=-\frac{4}{27}a^3+\frac{2}{3}a^2-a+\frac{1}{2}$$

また，$h(0)=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{4}a$，$h(1)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}a$ から，$0\leqq x\leqq 1$ における $h(x)$ の最小値を m とおくと，

(i)　$\dfrac{2}{3}a-\dfrac{1}{2}<0$ $\left(a<\dfrac{3}{4}\right)$ のとき

右表より，$m=h\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$		↘	0	↗	

(ii)　$0\leqq\dfrac{2}{3}a-\dfrac{1}{2}<\dfrac{1}{2}$ $\left(\dfrac{3}{4}\leqq a<\dfrac{3}{2}\right)$ のとき

(ii-i)　$\dfrac{1}{4}-\dfrac{a}{4}>0$ $(a<1)$ のとき

右表より，$m=h\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$

(ii-ii)　$\dfrac{1}{4}-\dfrac{a}{4}\leqq 0$ $(a\geqq 1)$ のとき

右表より，$m=h(0)=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{4}a$

x	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}a-\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$		↗		↘	0	↗	

(iii)　$\dfrac{1}{2}\leqq\dfrac{2}{3}a-\dfrac{1}{2}<1$ $\left(\dfrac{3}{2}\leqq a<\dfrac{9}{4}\right)$ のとき

$h\left(\dfrac{2}{3}a-\dfrac{1}{2}\right)$ と $h(0)$ の大小関係を調べるために，差をとり，

$$d(a)=h\left(\frac{2}{3}a-\frac{1}{2}\right)-h(0)$$

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{2}{3}a-\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$		↗	0	↘		↗	

すると，$d(a)=-\dfrac{4}{27}a^3+\dfrac{2}{3}a^2-\dfrac{3}{4}a+\dfrac{1}{4}$ となり，

$$d'(a)=-\frac{4}{9}a^2+\frac{4}{3}a-\frac{3}{4}=-\frac{1}{36}(4a-9)(4a-3)$$

このとき，$\dfrac{3}{2} \leqq a < \dfrac{9}{4}$ において，$d'(a) > 0$ より，$d(a) \geqq d\left(\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{1}{8} > 0$

よって，$h\left(\dfrac{2}{3}a - \dfrac{1}{2}\right) > h(0)$ となり，$m = h(0) = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4}a$ である。

(iv) $\dfrac{2}{3}a - \dfrac{1}{2} \geqq 1 \left(a \geqq \dfrac{9}{4}\right)$ のとき

$h(1) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4}a > \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4}a = h(0)$ より，

$$m = h(0) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}a$$

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$		$\nearrow$	0	$\searrow$	

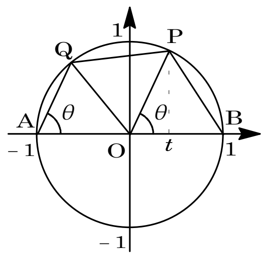
(i)～(iv) より，$a < 1$ のとき $m = 0$，$a \geqq 1$ のとき $m = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4}a$ である。

[解 説]

とにかく朴訥に場合分けをし，それぞれの場合について $h(x)$ の増減を調べました。難問ではないものの，かなりの時間を要します。

2

問題のページへ



(1)　$0<t<1$ より，$x^2-2tx+1=0$ ……(＊)の判別式 $D/4=t^2-1<0$ となり，(＊)は虚数解 $x=t\pm\sqrt{1-t^2}\,i$ をもつ。これを α とすると，

$$|\alpha|^2=t^2+(\sqrt{1-t^2})^2=1$$

よって，$|\alpha|=1$ である。

(2)　まず，$\alpha=t+\sqrt{1-t^2}\,i$ としても，一般性を失わない。

さて，$\angle\mathrm{BOP}=\theta$ とおくと，$0<t<1$ より，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ となり，

$$\angle\mathrm{AOQ}=\pi-2\angle\mathrm{OAQ}=\pi-2\theta,\ \angle\mathrm{POQ}=\angle\mathrm{AQO}=\angle\mathrm{QAO}=\theta$$

四角形 ABPQ の面積を S とすると，

$$S=\frac{1}{2}\cdot1^2\sin(\pi-2\theta)+\left(\frac{1}{2}\cdot1^2\sin\theta\right)\times2=\frac{1}{2}\sin2\theta+\sin\theta$$

$$S'=\cos2\theta+\cos\theta=2\cos\frac{3}{2}\theta\cos\frac{1}{2}\theta$$

θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
S'		＋	0	−	
S		↗	$\frac{3}{4}\sqrt{3}$	↘	

右表より，$\theta=\dfrac{\pi}{3}$ のとき S は最大値 $\dfrac{3}{4}\sqrt{3}$ をとる。このとき，$t=\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}$ である。

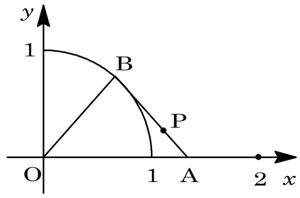
[解 説]

複素数平面を題材にした基本問題です。なお，(1)では，解と係数の関係を用いても OK です。

3

問題のページへ

(1)　$\angle \mathrm{AOB}=\theta$ とすると，$\mathrm{B}(\cos\theta,\ \sin\theta)$ となる。



また，$\mathrm{A}(t,\ 0)$ とすると，$\mathrm{AB}=1$ から，

$$(\cos\theta-t)^2+\sin^2\theta=1,\ -2t\cos\theta+t^2=0$$

$t=2\cos\theta$ より，$\mathrm{A}(2\cos\theta,\ 0)$

点 P は線分 AB 上の点なので，$0\leqq s\leqq 1$ として，$\mathrm{BP}:\mathrm{PA}=s:1-s$ とおく。

すると，$2\mathrm{BP}=\mathrm{OA}$ から，$2s\mathrm{AB}=\mathrm{OA}$ となり，

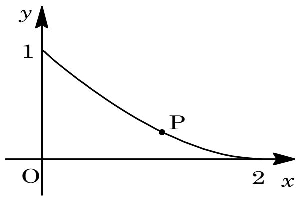
$$2s=2\cos\theta,\ s=\cos\theta$$

これより，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\cos\theta(2\cos\theta,\ 0)+(1-\cos\theta)(\cos\theta,\ \sin\theta)$

よって，$\mathrm{P}((1+\cos\theta)\cos\theta,\ (1-\cos\theta)\sin\theta)$

(2)　$0\leqq\theta<\frac{\pi}{2}$ において，点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ は，$x=(1+\cos\theta)\cos\theta$，$y=(1-\cos\theta)\sin\theta$

$$\frac{dx}{d\theta}=-\sin\theta\cos\theta+(1+\cos\theta)(-\sin\theta)$$
$$=-\sin\theta(2\cos\theta+1)\leqq 0$$
$$\frac{dy}{d\theta}=\sin\theta\sin\theta+(1-\cos\theta)\cos\theta$$
$$=-2\cos^2\theta+\cos\theta+1$$
$$=-2(2\cos\theta+1)(\cos\theta-1)\geqq 0$$



すると，点 P の軌跡は右図のようになり，

$$S=\int_0^2 y\,dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^0(1-\cos\theta)\sin\theta(-\sin\theta)(2\cos\theta+1)\,d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-2\cos^2\theta+\cos\theta+1)\sin^2\theta\,d\theta$$

ここで，$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\sin^2\theta\,d\theta=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2\theta\,d\theta=\frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 4\theta)\,d\theta=\frac{\pi}{16}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin^2\theta\,d\theta=\frac{1}{3}\Big[\sin^3\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{3}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\,d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2\theta)\,d\theta=\frac{\pi}{4}$$

よって，$S=-2\cdot\frac{\pi}{16}+\frac{1}{3}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{3}$

[解 説]

題意を読み取り，点 P の位置が把握できれば，後は計算だけです。

4　　問題のページへ

(1)　$P_1(x)$は1次多項式で，$P_1(0)=2^0-1=0$，$P_1(1)=2^1-1=1$となるので，

$$P_1(x)=x$$

さて，$Q_1(x)=P_2(x)-P_1(x)$とすると，$Q_1(x)$は2次多項式で，

$$Q_1(0)=P_2(0)-P_1(0)=0-0=0,\ Q_1(1)=P_2(1)-P_1(1)=1-1=0$$

これから，$Q_1(x)=a_1x(x-1)\ (a_1\neq 0)$とおくことができ，

$$P_2(x)=P_1(x)+Q_1(x)=x+a_1x(x-1)$$

そこで，$P_2(2)=2^2-1=3$より，$3=2+2a_1$，$a_1=\dfrac{1}{2}$

したがって，$Q_1(x)=P_2(x)-P_1(x)=\dfrac{1}{2}x(x-1)$

同様にして，$Q_2(x)=P_3(x)-P_2(x)$とすると，$Q_2(x)$は 3 次多項式となり，$Q_2(0)=Q_2(1)=Q_2(2)=0$より，$Q_2(x)=a_2x(x-1)(x-2)\ (a_2\neq 0)$とおける。

$$P_3(x)=P_2(x)+Q_2(x)=P_1(x)+Q_1(x)+Q_2(x)$$
$$=x+\frac{1}{2}x(x-1)+a_2x(x-1)(x-2)$$

$P_3(3)=2^3-1=7$より，$7=3+3+6a_2$，$a_2=\dfrac{1}{6}$

したがって，$Q_2(x)=P_3(x)-P_2(x)=\dfrac{1}{6}x(x-1)(x-2)$

(2)　(1)と同様に，$Q_n(x)=P_{n+1}(x)-P_n(x)$とすると，$Q_n(x)$は n 次多項式となり，$Q_n(0)=Q_n(1)=Q_n(2)=\cdots=Q_n(n)=0$から，

$$Q_n(x)=a_nx(x-1)(x-2)\cdots(x-n)\quad(a_n\neq 0)$$

以下，$a_n=\dfrac{1}{(n+1)!}$であることを数学的帰納法を用いて示す。

(i)　$n=1$のとき　$a_1=\dfrac{1}{(1+1)!}=\dfrac{1}{2}$より，成立する。

(ii)　$n\leqq l$のとき　$a_1=\dfrac{1}{(1+1)!}$，$a_2=\dfrac{1}{(2+1)!}$，$\cdots$，$a_l=\dfrac{1}{(l+1)!}$と仮定すると，

$$P_{l+1}(x)=P_l(x)+Q_l(x)=P_1(x)+Q_1(x)+Q_2(x)+\cdots+Q_l(x)$$
$$=x+\frac{x(x-1)}{2!}+\frac{x(x-1)(x-2)}{3!}+\cdots+\frac{x(x-1)(x-2)\cdots(x-l)}{(l+1)!}$$

このとき，$P_{l+2}(x)=P_{l+1}(x)+Q_{l+1}(x)$

$$=P_{l+1}(x)+a_{l+1}x(x-1)(x-2)\cdots(x-l)(x-l-1)$$

ここで，$x=l+2$を代入すると，

$$2^{l+2}-1=(l+2)+\frac{(l+2)(l+1)}{2!}+\frac{(l+2)(l+1)l}{3!}+\cdots+\frac{(l+2)(l+1)l\cdot\cdots\cdot 2}{(l+1)!}$$
$$+a_{l+1}(l+2)(l+1)l\cdot\cdots\cdot 2\cdot 1$$

$$2^{l+2}-{}_{l+2}\mathrm{C}_0={}_{l+2}\mathrm{C}_1+{}_{l+2}\mathrm{C}_2+{}_{l+2}\mathrm{C}_3+\cdots+{}_{l+2}\mathrm{C}_{l+1}+a_{l+1}(l+2)!$$

すると，$a_{l+1}(l+2)!=2^{l+2}-({}_{l+2}\mathrm{C}_0+{}_{l+2}\mathrm{C}_1+{}_{l+2}\mathrm{C}_2+{}_{l+2}\mathrm{C}_3+\cdots+{}_{l+2}\mathrm{C}_{l+1})$

$$=(1+1)^{l+2}-({}_{l+2}\mathrm{C}_0+{}_{l+2}\mathrm{C}_1+{}_{l+2}\mathrm{C}_2+{}_{l+2}\mathrm{C}_3+\cdots+{}_{l+2}\mathrm{C}_{l+1})$$

$$={}_{l+2}\mathrm{C}_{l+2}=1$$

よって，$a_{l+1}=\dfrac{1}{(l+2)!}$となり，$n=l+1$のときも成立する。

(i)(ii)より，$a_n=\dfrac{1}{(n+1)!}$すなわち$Q_n(x)=\dfrac{x(x-1)(x-2)\cdots(x-n)}{(n+1)!}$となる。

以上より, $n\geqq 2$ において,

$$P_n(x)=x+\frac{x(x-1)}{2!}+\frac{x(x-1)(x-2)}{3!}+\cdots+\frac{x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1)}{n!}$$

なお，$n=1$のときも，$P_1(x)=x$ より成立する。

[解 説]

最初は，与えられた条件を連立方程式に直して，$P_1(x)=x$，$P_2(x)=\dfrac{1}{2}x(x+1)$，$P_3(x)=\dfrac{1}{6}x(x^2+5)$を導きました。しかし，この方法では，(2)に繋がりません。そこで，考え直したのが上の解です。決してやさしくはありませんが，演習する価値のある問題です。

5

問題のページへ

点 $\mathrm{C}(0,\ t,\ 0)$ とし，$\triangle\mathrm{ABC}$ の面積を S とする。

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-6,\ 3,\ -2)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-1,\ t-1,\ -2)$ より，

$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{36+9+4}=7,\ |\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=\sqrt{1+(t-1)^2+4}=\sqrt{t^2-2t+6}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=6+3(t-1)+4=3t+7$$

すると，$S=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{49(t^2-2t+6)-(3t+7)^2}$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{40t^2-140t+245}=\frac{\sqrt{5}}{2}\sqrt{8\left(t-\frac{7}{4}\right)^2+\frac{49}{2}}$$

よって，$t=\dfrac{7}{4}$ のとき, S は最小値 $\dfrac{\sqrt{5}}{2}\sqrt{\dfrac{49}{2}}=\dfrac{7\sqrt{10}}{4}$ をとる。

[解 説]

三角形の面積公式への代入練習とも思える問題です。