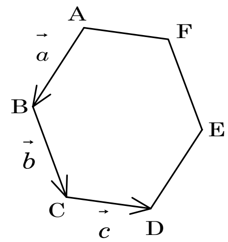
1

問題のページへ



(1) $\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\overrightarrow{\mathrm{CD}}+\overrightarrow{\mathrm{DE}}+\overrightarrow{\mathrm{EF}}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}-\vec{a}-\vec{b}=\vec{c}$

(2) 条件より，△ACE と△BDF は重心が一致するので，

$$\frac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{AE}})=\frac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{AF}})$$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{a}+\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\vec{b}+\vec{c}$ より，

$$(\vec{a}+\vec{b})+(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}+(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})+\vec{c}$$

よって，$\vec{b}=\vec{a}+\vec{c}$ ………(＊)

(3) (1)より，対角線 AD の中点を中心として，四角形 ABCD を$180°$回転すると，四角形 DEFA に重なるので，六角形 R の面積は四角形 ABCD の面積の 2 倍である。

さて，$\vec{a}\cdot\vec{b}=4$ なので，(＊)から $\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{c})=4$，$|\vec{a}|^2+\vec{a}\cdot\vec{c}=4$ で，$\vec{a}\cdot\vec{c}=-1$ より，

$$|\vec{a}|^2=5,\ |\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=|\vec{a}|=\sqrt{5}$$

$\vec{b}\cdot\vec{c}=1$ なので，(＊)から $(\vec{a}+\vec{c})\cdot\vec{c}=1$，$\vec{a}\cdot\vec{c}+|\vec{c}|^2=1$ で，$\vec{a}\cdot\vec{c}=-1$ より，

$$|\vec{c}|^2=2,\ |\overrightarrow{\mathrm{CD}}|=|\vec{c}|=\sqrt{2}$$

また，$|\vec{b}|^2=|\vec{a}+\vec{c}|^2=5+2\cdot(-1)+2=5$ より，$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|=|\vec{b}|=\sqrt{5}$

さらに，$|\vec{a}+\vec{b}|^2=5+2\cdot4+5=18$ より，$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=|\vec{a}+\vec{b}|=3\sqrt{2}$ となり，

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}=(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=-1+1=0$$

よって，$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{BA}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{5\times5-(-4)^2}=\frac{3}{2}$

$$\triangle\mathrm{ACD}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\cdot|\overrightarrow{\mathrm{CD}}|=\frac{1}{2}\cdot3\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=3$$

以上より，R の面積は，$(\triangle\mathrm{ABC}+\triangle\mathrm{ACD})\times2=\left(\frac{3}{2}+3\right)\times2=9$ である。

[解 説]

(3)では，AB = BC であることが気になりましたが，この点は無視して，普通に三角形の面積を計算しました。

2

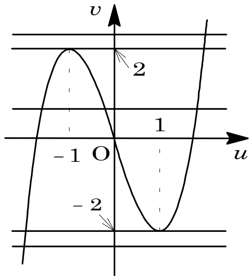
問題のページへ

(1)　$u^3-3u+2t=0$ ……①より，$u^3-3u=-2t$ と変形すると，条件より，uv 平面上で $v=u^3-3u$ ……②と $v=-2t$ ……③の共有点のうち，u 座標の絶対値の最小のものが $f(t)$ である。

②より，$v'=3u^2-3=3(u+1)(u-1)$

u	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
v'	$+$	0	$-$	0	$+$
v	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$

すると，②のグラフは右図のようになり，③との共有点の様子から，次のように場合分けをする。

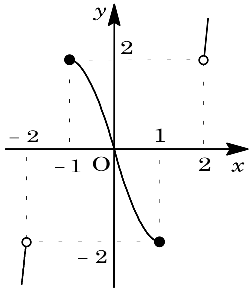


(i)　$-2t<-2$，$2<-2t$ のとき　②と③は 1 つの共有点しかもたないので，その共有点が $(f(t),\ -2t)$ である。

(ii)　$-2t=\pm 2$ のとき　②と③は 2 つの共有点をもつが，u 座標の絶対値が小さいのは接点の方で，$(f(t),\ -2t)=(\mp 1,\ \pm 2)$ (複号同順)となる。

(iii)　$-2<-2t<2$ のとき　②と③は 3 つの共有点をもつが，u 座標の絶対値が小さいのは $-1<u<1$ の範囲にある共有点であり，その点が $(f(t),\ -2t)$ である。

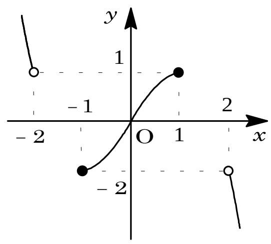
以上より，$(x,\ y)=(f(t),\ -2t)$ と表される曲線は，$y=x^3-3x$ $(x<-2,\ -1\leqq x\leqq 1,\ 2<x)$ であり，図示すると右図のようになる。



(2)　(1)と同様にして，①より $-\dfrac{1}{2}u^3+\dfrac{3}{2}u=t$ と変形すると，$v=-\dfrac{1}{2}u^3+\dfrac{3}{2}u$ ……④と $v=t$ の共有点のうち，u 座標の絶対値の最小のものが $f(t)$ である。

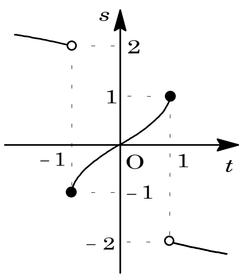
④より，$v'=-\dfrac{3}{2}u^2+\dfrac{3}{2}=-\dfrac{3}{2}(u+1)(u-1)$

すると，$t=\pm 1$ で $f(t)$ は不連続で，$(x,\ y)=(f(t),\ t)$ は，$y=-\dfrac{3}{2}x^3+\dfrac{3}{2}x$ $(x<-2,\ -1\leqq x\leqq 1,\ 2<x)$ ……⑤で表される曲線を描き，図示すると右上図のようになる。



これより，点 $(t,\ f(t))$ の描く曲線は，⑤の曲線を直線 $y=x$ に関して対称移動したものであり，これを $s=f(t)$ とおくと，$t=-\dfrac{3}{2}s^3+\dfrac{3}{2}s$ $(s<-2,\ -1\leqq s\leqq 1,\ 2<s)$ である。

よって，このグラフは右図のようになる。



[解 説]

おもしろい問題ですが, (1)の誘導は少し使いにくいものです。

3

問題のページへ

(1)　$f(x)=x^3$ とすると，$x_1<x_2$ を満たすすべての実数 x_1，x_2 に対して $f(x_1)<f(x_2)$ であるが，$f'(0)=0$ となる。

よって, (1)の命題は正しくない。

(2)　$f(x)=1-e^{-x}$ とすると，$f(0)=0$ かつ $f'(x)=e^{-x}>0$ であるが，$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=1$ となる。

よって, (2)の命題は正しくない。

(3)　$f'(x)>0$ より, $x>0$ に対して，$f(x)>f(0)=0$ である。

ここで，十分大きな整数 n に対して，$n\leqq x<n+1$ とすると，

$$\int_0^x f(t)\,dt \geqq \int_0^n f(t)\,dt=\sum_{k=0}^{n-1}\int_k^{k+1}f(t)\,dt\ \cdots\cdots\cdots①$$

さて，$S_k=\displaystyle\int_k^{k+1}f(t)\,dt$ とおくと，$f(x)$ が単調増加より，

$$0<S_0<S_1<S_2<\cdots<S_{n-1}$$

よって，$\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\int_k^{k+1}f(t)\,dt>nS_0\ \cdots\cdots\cdots②$

①②より，$\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt>nS_0$

$x\to+\infty$ のとき $n\to+\infty$ となるので，$nS_0\to+\infty$ から $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)\,dt=+\infty$ である。

以上より, (3)の命題は正しい。

[解 説]

命題(2)と命題(3)の仮定が同じことから，出題者の心理を考えると，一方が真，他方が偽であると予想できます。実際そのとおりでした。

4

問題のページへ

$f(x)=ax^n\log x-ax=a(x^n\log x-x)$ に対して，

$$f'(x)=a(nx^{n-1}\log x+x^{n-1}-1)=a\{x^{n-1}(n\log x+1)-1\}$$

ここで，$g(x)=x^{n-1}(n\log x+1)-1$ とおくと，$f'(x)=ag(x)$ となり，

$$g'(x)=(n-1)x^{n-2}(n\log x+1)+nx^{n-2}=x^{n-2}\{n(n-1)\log x+2n-1\}$$

$x>0$ において，$g'(x)=0$ の解は, $n\geqq 2$ より，

$$\log x=-\frac{2n-1}{n(n-1)},\quad x=e^{-\frac{2n-1}{n(n-1)}}$$

この値を $x=\alpha$ とおくと，$g(x)$ の増減は右表のようになり，$\lim_{x\to+0}g(x)=-1$，$g(1)=0$ に注意すると，$0<x<1$ のとき $g(x)<0$, $x>1$ のとき $g(x)>0$ である。

x	0	$\cdots$	α	$\cdots$
$g'(x)$		$-$	0	$+$
$g(x)$		$\searrow$		$\nearrow$

(i)　$a>0$ のとき

$f(x)$ の増減は，右表のようになり，最小値は $f(1)=-a$ となる。

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	$-a$	$\nearrow$

条件から，$-a=-1$，$a=1$ となり, $a>0$ も満たす。

(ii)　$a=0$ のとき

$f(x)=0$ より，最小値が -1 にはならない。

(iii) $a<0$ のとき

$\lim_{x\to\infty}f(x)=-\infty$ より，最小値は存在しない。

(i)(ii)(iii)より，$f(x)=x^n\log x-x$ である。

このとき，$\int_1^e f(x)dx=\int_1^e(x^n\log x-x)dx$

$$=\frac{1}{n+1}\Big[x^{n+1}\log x\Big]_1^e-\frac{1}{n+1}\int_1^e x^n dx-\frac{1}{2}\Big[x^2\Big]_1^e$$

$$=\frac{1}{n+1}e^{n+1}-\frac{1}{(n+1)^2}\Big[x^{n+1}\Big]_1^e-\frac{1}{2}(e^2-1)$$

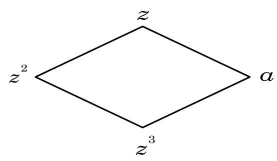
$$=\frac{n}{(n+1)^2}e^{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}-\frac{1}{2}e^2+\frac{1}{2}$$

[解 説]

$g(1)=0$ は式の形から見つけます。ただ，$g(x)$ の増減について，チェックが少々面倒です。なお，$\lim_{x\to+0}x^n\log x=0$ は証明なしで用いています。

5

問題のページへ



4 点 a, z, z^2, z^3 がひし形の頂点となるので，まず 2 点 a, z^2 の中点と, 2 点 z, z^3 の中点が一致する。

$$\frac{a+z^2}{2}=\frac{z+z^3}{2}\cdots\cdots\cdots①$$

さらに, 辺 z^2z^3 と辺 z^2z の長さが等しいので,

$$|z^3-z^2|=|z^2-z|\cdots\cdots\cdots②$$

②より，$|z|^2|z-1|=|z||z-1|$

z が実数のとき，ひし形はできないので，$z\neq 0$，$z\neq 1$ となり,

$$|z|\neq 0,\ |z-1|\neq 0$$

よって，$|z|=1$ から $z=\cos\theta+i\sin\theta$ $(0<\theta<\pi,\ \pi<\theta<2\pi)$ とおくことができる。

①に代入して，$a+\cos 2\theta+i\sin 2\theta=\cos\theta+i\sin\theta+\cos 3\theta+i\sin 3\theta$

$$a+\cos 2\theta=\cos\theta+\cos 3\theta\cdots\cdots\cdots③,\quad \sin 2\theta=\sin\theta+\sin 3\theta\cdots\cdots\cdots④$$

④より，$\sin 2\theta=2\sin 2\theta\cos\theta$，$\sin 2\theta(2\cos\theta-1)=0$

$\sin 2\theta=0$，$\cos\theta=\frac{1}{2}$ となり，$0<\theta<\pi$，$\pi<\theta<2\pi$ から,

$$\theta=\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2},\ \frac{\pi}{3},\ \frac{5\pi}{3}$$

(i)　$\theta=\frac{\pi}{2}$ のとき

$z=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=i$ となり，③より $a=\cos\frac{\pi}{2}+\cos\frac{3\pi}{2}-\cos\pi=1$

(ii)　$\theta=\frac{3\pi}{2}$ のとき

$z=\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}=-i$ となり，③より $a=\cos\frac{3\pi}{2}+\cos\frac{9\pi}{2}-\cos 3\pi=1$

(iii)　$\theta=\frac{\pi}{3}$ のとき

$z=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ となり，③より $a=\cos\frac{\pi}{3}+\cos\pi-\cos\frac{2\pi}{3}=0$

(iv)　$\theta=\frac{5\pi}{3}$ のとき

$z=\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ となり，③より $a=\cos\frac{5\pi}{3}+\cos 5\pi-\cos\frac{10\pi}{3}=0$

[解 説]

ひし形を，平行四辺形の中で隣りあう 2 辺の長さが等しい四角形という条件で定義しています。a の入っていない②の関係式がポイントです。