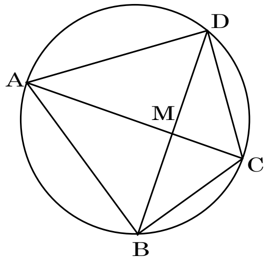
1

問題のページへ



(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}+2(\overrightarrow{\mathrm{CB}}+\overrightarrow{\mathrm{CD}})=\vec{0}$ より，

$$\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}}{2}=-2\cdot\frac{\overrightarrow{\mathrm{CB}}+\overrightarrow{\mathrm{CD}}}{2}$$

BD の中点を M とすると，$\overrightarrow{\mathrm{AM}}=-2\overrightarrow{\mathrm{CM}}$ ………(＊)

よって, A, M, C は同一直線上にあるので, 直線 AC は線分 BD の中点を通る。

(2)　(1)より，BM = DM

また, 条件より $\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BD}}=0$ なので，$\mathrm{AC}\perp\mathrm{BD}$

これより, AC は BD の垂直二等分線となり，$\triangle\mathrm{ABC}\equiv\triangle\mathrm{ADC}$ となるので,

$$\angle\mathrm{ABC}=\angle\mathrm{ADC}$$

また, 四角形 ABCD は円に内接するので，$\angle\mathrm{ABC}+\angle\mathrm{ADC}=180^\circ$ より,

$$\angle\mathrm{ABC}=\angle\mathrm{ADC}=90^\circ$$

すなわち, AC は半径 1 である四角形 ABCD の外接円の直径となり，AC = 2 である。

ここで, (＊)より，AM : MC = 2 : 1 なので，$\mathrm{AM}=2\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{4}{3}$

外接円の中心を O とすると，$\mathrm{OM}=\mathrm{AM}-\mathrm{AO}=\dfrac{4}{3}-1=\dfrac{1}{3}$

$$\mathrm{BM}=\sqrt{\mathrm{OB}^2-\mathrm{OM}^2}=\sqrt{1-\frac{1}{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

よって，$\mathrm{AB}=\mathrm{AD}=\sqrt{\mathrm{AM}^2+\mathrm{BM}^2}=\sqrt{\dfrac{16}{9}+\dfrac{8}{9}}=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$

$$\mathrm{BC}=\mathrm{DC}=\sqrt{\mathrm{AC}^2-\mathrm{AB}^2}=\sqrt{4-\frac{24}{9}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

[解　説]

(1)の誘導によって，AC が外接円の直径であることを見つけるのが最大のポイントです。

2

問題のページへ

(1) $xE-A=\begin{pmatrix} x-4 & -3 \\ -2 & x+1 \end{pmatrix}$が逆行列をもたないことより，

$$(x-4)(x+1)-6=0,\ x^2-3x-10=0,\ (x+2)(x-5)=0$$

この解が$x=\alpha$，β $(\alpha>\beta)$より，$\alpha=5$，$\beta=-2$

このとき，$P=\dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$，$Q=\dfrac{1}{-7}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$より，

$$PQ=-\frac{1}{49}\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(2) $P^2=\dfrac{1}{49}\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}=\dfrac{1}{49}\begin{pmatrix} 42 & 21 \\ 14 & 7 \end{pmatrix}=\dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}=P$

よって，自然数nに対して，帰納的に$P^n=P$となる。

(3) まず，$QP=-\dfrac{1}{49}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$Q^2=\frac{1}{49}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}=\frac{1}{49}\begin{pmatrix} 7 & -21 \\ -14 & 42 \end{pmatrix}=\frac{1}{-7}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}=Q$$

ここで，$A^n=\alpha^nP+\beta^nQ$が成立することを数学的帰納法を用いて証明する。

(i) $n=1$のとき

$$\alpha P+\beta Q=5\cdot\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}-2\cdot\frac{1}{-7}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 28 & 21 \\ 14 & -7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}=A$$

よって，$n=1$のとき成立する。

(ii) $n=k$のとき

$A^k=\alpha^kP+\beta^kQ$が成り立つと仮定する。

$$A^{k+1}=(\alpha^kP+\beta^kQ)(\alpha P+\beta Q)=\alpha^{k+1}P^2+\alpha^k\beta PQ+\alpha\beta^kQP+\beta^{k+1}Q^2$$

$P^2=P$，$Q^2=Q$，$PQ=QP=O$より，$A^{k+1}=\alpha^{k+1}P+\beta^{k+1}Q$となる。

よって，$n=k+1$のときも成立する。

(i)(ii)より，すべての自然数nに対して，$A^n=\alpha^nP+\beta^nQ$が成立する。

[解 説]

10 年ほど前に，よく出題された有名問題です。ただ，本問が初めてだと，誘導のない$Q^2=Q$，$QP=O$を発見するのは難しいでしょう。なお，(3)は二項定理を用いても証明ができます。

3

問題のページへ

(1)　$\log_2 3$が有理数であると仮定すると, $p,\ q$ を互いに素な自然数として,

$$\log_2 3=\frac{q}{p},\ \ 2^{\frac{q}{p}}=3,\ \ 2^q=3^p\ \cdots\cdots\cdots①$$

$p,\ q$ は自然数なので, ①は左辺が偶数, 右辺が奇数となり, 成立しない。

よって, $\log_2 3$は無理数である。

(2)　まず, $n=1$のとき$\log_2 1=0$となり, $\log_2 n$は整数である。

$n\geqq 2$ で$\log_2 n$が有理数のとき, $p,\ q$ を互いに素な自然数として,

$$\log_2 n=\frac{q}{p},\ \ 2^{\frac{q}{p}}=n,\ \ 2^q=n^p$$

ここで, m を正の奇数とし, l を 0 以上の整数として, $n=m\cdot 2^l$ とおくと,

$$2^q=(m\cdot 2^l)^p=m^p\cdot 2^{lp},\ \ 2^{q-lp}=m^p\ \cdots\cdots\cdots②$$

p は自然数なので, ②の右辺は奇数となり, 左辺も奇数となる。

よって, $q-lp=0$, $q=lp\ \cdots\cdots\cdots③$

$p,\ q$ は自然数なので, ③から l も自然数となる。

すると, $\dfrac{q}{p}=l$ より$\log_2 n=l$となり, $\log_2 n$が整数でない有理数となることはない。

[解 説]

(1)は基本的ですが, (2)では$n=m\cdot 2^l$とおくことがすべてです。このような設定を自分でしなくてはいけないところが難しさの原因です。

4

問題のページへ

(1)　$n=2$ のとき，$I(x)=\int_0^x \sin t\sin 2t\,dt=\int_0^x -\frac{1}{2}(\cos 3t-\cos t)\,dt$

$$=-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}\sin 3t-\sin t\right]_0^x=-\frac{1}{6}\sin 3x+\frac{1}{2}\sin x$$

$$I'(x)=-\frac{1}{2}\cos 3x+\frac{1}{2}\cos x=-\frac{1}{2}(\cos 3x-\cos x)=\sin 2x\sin x$$

$I(x)$は周期2π の周期関数なので，$0\leqq x\leqq 2\pi$ で考えても一般性は失われない。

したがって，右表より，最大値は$I\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{6}+\frac{1}{2}=\frac{2}{3}$となる。

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π	$\cdots$	$\frac{3}{2}\pi$	$\cdots$	2π
$I'(x)$	0	＋	0	－	0	－	0	＋	0
$I(x)$	0	↗		↘	0	↘		↗	0

(2)　$I(x)=\int_0^x \sin t\sin nt\,dt=\int_0^x -\frac{1}{2}\{\cos(n+1)t-\cos(n-1)t\}\,dt$

$$=-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n+1}\sin(n+1)t-\frac{1}{n-1}\sin(n-1)t\right]_0^x$$

$$=-\frac{1}{2(n+1)}\sin(n+1)x+\frac{1}{2(n-1)}\sin(n-1)x$$

$-1\leqq\sin(n+1)x\leqq 1$，$-1\leqq\sin(n-1)x\leqq 1$ より，

$$I(x)\leqq\frac{1}{2(n+1)}+\frac{1}{2(n-1)}=\frac{n-1+n+1}{2(n+1)(n-1)}=\frac{n}{n^2-1}\cdots\cdots\cdots①$$

これより，$I(x)$の最大値が$\frac{n}{n^2-1}$であるのは，①の等号が成立するときなので，

$\sin(n+1)x=-1\cdots\cdots②$，$\sin(n-1)x=1\cdots\cdots③$

②より, m を 0 以上の整数として，$(n+1)x=2m\pi+\frac{3}{2}\pi\cdots\cdots\cdots④$

③より, l を 0 以上の整数として，$(n-1)x=2l\pi+\frac{1}{2}\pi\cdots\cdots\cdots⑤$

④＋⑤より，$2nx=2m\pi+2l\pi+2\pi$，$nx=(m+l+1)\pi\cdots\cdots\cdots⑥$

④－⑤より，$2x=2m\pi-2l\pi+\pi$，$x=\left(m-l+\frac{1}{2}\right)\pi\cdots\cdots\cdots⑦$

⑥⑦より，$n\left(m-l+\frac{1}{2}\right)\pi=(m+l+1)\pi$，$\frac{1}{2}n=(m+l+1)-n(m-l)$

以上より, l, m, n は整数なので, n は偶数となる。

[解 説]

(2)でも，(1)と同じように微分して増減表と考えました。ところが，それを実行するのは複雑そうに思えましたので，見方を変えたところ，あっさり結論が導けました。おもしろい問題です。

5

問題のページへ

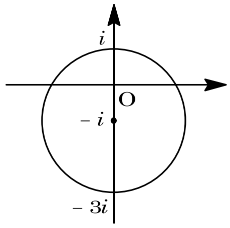
(1)　$z = x + yi$ とおくと，$z - 3i = x + (y-3)i$

条件より，$|z-3i| = 2|z|$ なので，$|z-3i|^2 = 4|z|^2$

$$x^2 + (y-3)^2 = 4(x^2+y^2),\ x^2+y^2+2y-3=0$$

$$x^2 + (y+1)^2 = 4$$

よって，点 z は中心 $-i$，半径 2 の円を描く。



(2)　(1)より，$|z+i| = 2$………①

条件より，$w = \dfrac{z+i}{z-i}$………②

②より，$w(z-i) = z+i$，$(w-1)z = (w+1)i$

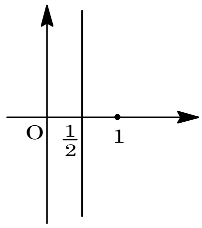
$w = 1$ のときは成立しないので，$z = \dfrac{w+1}{w-1}i$………③

③を①に代入すると，

$$\left|\frac{w+1}{w-1}i + i\right| = 2,\ \left|\frac{2w}{w-1}i\right| = 2,\ \left|\frac{w}{w-1}\right| = 1$$

$$|w| = |w-1|$$

よって，点 w は原点と点 1 を結ぶ線分の垂直二等分線を描く。



[解 説]

(1)はアポロニウスの円ですが，このことは利用せずに解を作りました。(2)は複素数平面上の変換を題材とした基本的な問題です。