

1

解答解説のページへ

四角形 ABCD は半径 1 の円に内接し、 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$ 、 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + 2(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}) = \vec{0}$ を満たしている。このとき次の問いに答えよ。

- (1) 直線 AC は線分 BD の中点を通ることを示せ。
- (2) 四角形 ABCD の 4 辺の各辺の長さを求めよ。

2

解答解説のページへ

行列 E と A を $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ とおく。行列 $xE - A$ が逆行列をもたないような x の 2 つの値を α , β ($\alpha > \beta$) とし、行列 P, Q を

$$P = \frac{1}{\alpha - \beta} \begin{pmatrix} \alpha + 1 & 3 \\ 2 & \alpha - 4 \end{pmatrix}, \quad Q = \frac{1}{\beta - \alpha} \begin{pmatrix} \beta + 1 & 3 \\ 2 & \beta - 4 \end{pmatrix}$$

で定める。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 行列の積 PQ を計算せよ。
- (2) 自然数 n に対して、 P^n を求めよ。
- (3) すべての自然数 n に対して、 $A^n = \alpha^n P + \beta^n Q$ が成立することを示せ。

3

解答解説のページへ

次の問いに答えよ。

- (1) $\log_2 3$ は無理数であることを証明せよ。
- (2) n が正の整数のとき、 $\log_2 n$ が整数でない有理数となることはあるかどうか調べよ。

4

解答解説のページへ

n を 2 以上の整数とし, $I(x) = \int_0^x \sin t \sin nt dt$ ($x \geq 0$) と定める。

- (1) $n = 2$ のとき, $I(x)$ の最大値を求めよ。
- (2) $I(x)$ の最大値が $\frac{n}{n^2 - 1}$ であるならば, n は偶数であることを証明せよ。

5

解答解説のページへ

次の問いに答えよ。

- (1) 複素数平面上で方程式 $|z - 3i| = 2|z|$ が表す図形を求め、図示せよ。
- (2) 複素数 z が(1)で求めた図形から $z = i$ を除いた部分を動くとき、複素数 $w = \frac{z+i}{z-i}$ で表される点の軌跡を求め、図示せよ。