

1

問題のページへ

$$f(x) = x^3 + ax^2 + 2bx \text{ より, } f'(x) = 3x^2 + 2ax + 2b$$

3 次関数 $f(x)$ が $0 < x < 2$ の範囲に極大値と極小値をもつ条件は、2 次方程式 $f'(x) = 0$ が $0 < x < 2$ の範囲に異なる 2 実数解をもつ条件に一致する。

$$\text{まず, } f'(x) = 0 \text{ の判別式 } D > 0 \text{ より, } a^2 - 6b > 0, b < \frac{1}{6}a^2 \dots\dots$$

$$y = f'(x) \text{ のグラフの軸が } x = -\frac{a}{3} \text{ より,}$$

$$0 < -\frac{a}{3} < 2, -6 < a < 0 \dots\dots$$

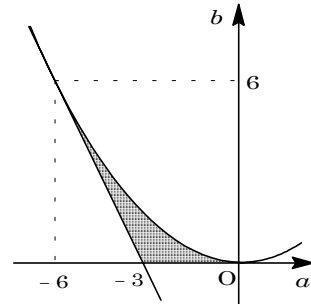
$$\text{また, } f'(0) = 2b > 0 \text{ より, } b > 0 \dots\dots$$

$$f'(2) = 12 + 4a + 2b > 0 \text{ より, } b > -2a - 6 \dots\dots$$

~ を満たす領域を図示すると、右図の網点部となる。ただし、境界は含まない。

条件より、 a, b は整数なので、この領域内の格子点が求める a, b の値となる。

$$\text{よって, } (a, b) = (-3, 1) \text{ である。}$$



[解 説]

から までの不等式は、簡単に求められます。しかし、この不等式を a, b 平面上に図示して、領域内の格子点をさがす過程には時間がかかります。上の解ではその記述を省略しましたが。

2

問題のページへ

$$(1) A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \text{とおくと,}$$

$$f(AB) = (ap + br) + (cq + ds), f(BA) = (pa + qc) + (rb + sd)$$

よって, $f(AB) = f(BA)$

$$(2) P = PQ - QP \text{ より, } f(P) = f(PQ - QP)$$

$$\text{条件より, } f(PQ - QP) = f(PQ) - f(QP)$$

すると, (1)より $f(PQ) - f(QP) = 0$ なので, $f(P) = 0$ となる。

$$(3) P^2 = P^2Q - PQP \text{ より, (2)と同様にして,}$$

$$f(P^2) = f(P^2Q - PQP) = f(P^2Q) - f(PQP) = f(P^2Q) - f(P^2Q) = 0$$

$$(4) P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{とおくと, ハミルトン・ケーリーの定理より,}$$

$$P^2 - f(P)P + (ad - bc)E = O$$

$$(2) \text{より } f(P) = 0 \text{ なので, } P^2 + (ad - bc)E = O$$

$$P^2 = -(ad - bc)E = -\begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix}$$

$$(3) \text{より } f(P^2) = 0 \text{ なので, } -2(ad - bc) = 0, ad - bc = 0$$

$$\text{以上より, } P^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{となる。}$$

[解 説]

行列のトレースについての問題です。(4)がメインですが, (1)から(3)までのていねいな誘導にのれば, 論証の方向性が見えてきます。

3

問題のページへ

$0 < \theta < 2\pi$ として、円 $x^2 + (y-2)^2 = 1$ 上の点を $(\cos\theta, \sin\theta + 2)$ とする。

この点が、放物線 $y = x^2$ を平行移動した放物線の頂点とすると、その方程式は、

$$y = (x - \cos\theta)^2 + \sin\theta + 2$$

ここで、接点を $(t, (t - \cos\theta)^2 + \sin\theta + 2)$ ($t > 0$) とおく。

すると、 $y' = 2(x - \cos\theta)$ なので、条件より、

$$\frac{(t - \cos\theta)^2 + \sin\theta + 2}{t} = 2(t - \cos\theta)$$

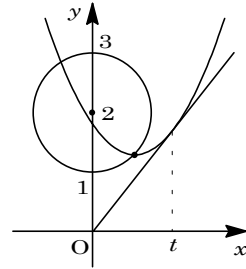
$$(t - \cos\theta)^2 + \sin\theta + 2 = 2t(t - \cos\theta)$$

まとめて、 $t^2 = \cos^2\theta + \sin\theta + 2 = -\sin^2\theta + \sin\theta + 3 = -\left(\sin\theta - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{13}{4}$

$$t > 0 \text{ より, } t = \sqrt{-\left(\sin\theta - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{13}{4}}$$

-1 $\leq \sin\theta \leq 1$ より、 t が最大となるのは $\sin\theta = \frac{1}{2}$ のとき、すなわち $\theta = \frac{\pi}{6}$ または $\theta = \frac{5\pi}{6}$ のときである。このとき頂点の座標は、 $(\cos\frac{\pi}{6}, \sin\frac{\pi}{6} + 2) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{5}{2}\right)$ または $(\cos\frac{5\pi}{6}, \sin\frac{5\pi}{6} + 2) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{5}{2}\right)$ となる。

また、 t が最小となるのは $\sin\theta = -1$ のとき、すなわち $\theta = \frac{3\pi}{2}$ のときである。このとき頂点の座標は、 $(\cos\frac{3\pi}{2}, \sin\frac{3\pi}{2} + 2) = (0, 1)$ となる。



[解 説]

円周上の点をパラメータ表示して、放物線の方程式を作りました。なお、最大となる場合が 2 つありましたが、問題文を読んだときには見抜けませんでした。

4

問題のページへ

(1) $f(x) = e^x - ax - b$ とおくと, $f'(x) = e^x - a$

(i) $a < 0$ のとき

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x - ax - b) = -\infty \text{ より, } f(x) < 0 \text{ は, すべての実数 } x \text{ に対して}$$

は成立しない。

(ii) $a = 0$ のとき

$f(x) = e^x - b$ より, すべての実数 x に対して $f(x) > 0$ が成立する条件は, $-b > 0$ すなわち $b < 0$ である。

(iii) $a > 0$ のとき

$f'(x) = e^x - a = 0$ の解は $x = \log a$ より, $f(x)$ の増減は右表のようになる。

x	...	$\log a$...
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	\searrow		\nearrow

よって, すべての実数 x に対して $f(x) > 0$ が成立する条件は, $f(\log a) > 0$ である。

$$e^{\log a} - a \log a - b > 0, \quad b < e^{\log a} - a \log a = a(1 - \log a)$$

(i)(ii)(iii)より, 求める条件は, $a = 0$ かつ $b < 0$, または $a > 0$ かつ $b < a(1 - \log a)$

(2) $I = \int_0^1 (e^x - ax - b) dx = \left[e^x - \frac{a}{2}x^2 - bx \right]_0^1 = e - 1 - \frac{a}{2} - b$

(i) $a = 0$ かつ $b < 0$ のとき

$I = e - 1 - b$ より, $b = 0$ のとき最小値 $e - 1$ をとる。

(ii) $a > 0$ かつ $b < a(1 - \log a)$ のとき

$$I = e - 1 - \frac{a}{2} - b < e - 1 - \frac{a}{2} - a + a \log a = a \log a - \frac{3}{2}a + e - 1$$

ここで, $g(a) = a \log a - \frac{3}{2}a + e - 1$ とおくと,

$$g'(a) = \log a + 1 - \frac{3}{2} = \log a - \frac{1}{2}$$

右表より, $a = \sqrt{e}$ のとき最小値をとり,

$$g(\sqrt{e}) = e - \sqrt{e} - 1$$

a	0	...	\sqrt{e}	...
$g'(a)$		-	0	+
$g(a)$		\searrow		\nearrow

すると, このとき $b = \sqrt{e} \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{e}}{2}$ であり, I は最小値 $e - \sqrt{e} - 1$ をとる。

(i)(ii)より, $a = \sqrt{e}$, $b = \frac{\sqrt{e}}{2}$ のとき, I は最小値 $e - \sqrt{e} - 1$ をとる。

[解 説]

(2)の(ii)では, まず a を $a > 0$ で固定し, b を $b < a(1 - \log a)$ の条件のもとで動かして最小となる場合を考え, 次にその状態で a を $a > 0$ で動かして最小値を求めています。いわゆる 1 文字固定という方法を利用しています。

5

問題のページへ

(1) x, y を実数として, $z = x + yi$ とおくと, $1 - \bar{z} = (a + i)(z - \bar{z})$ より,

$$1 - (x - yi) = (a + i) \cdot 2yi, \quad 1 - x + yi = -2y + 2ayi$$

よって, $1 - x = -2y \dots\dots$, $y = 2ay \dots\dots$

$$\text{より, } (2a - 1)y = 0$$

 $y = 0$ のとき, より $x = 1$ となり, z は 1 点だけを表すので不適である。よって, $y \neq 0$ より $a = \frac{1}{2}$ となり, このとき点 z は で表される直線を描く。(2) 条件より, $|\beta| = |\beta - 1| \dots\dots$, $|\beta| = |\beta - \alpha| \dots\dots$

$$\text{より, } |\beta|^2 = |\beta - 1|^2, \quad \beta\bar{\beta} = (\beta - 1)(\bar{\beta} - 1)$$

$$\beta + \bar{\beta} = 1 \dots\dots\dots$$

$$\text{より, } |\beta|^2 = |\beta - \alpha|^2, \quad \beta\bar{\beta} = (\beta - \alpha)(\bar{\beta} - \bar{\alpha})$$

$$\alpha\bar{\alpha} - \beta\bar{\alpha} - \alpha\bar{\beta} = 0 \dots\dots\dots$$

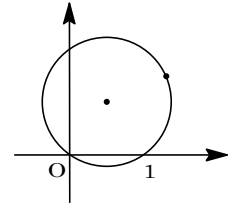
$$\text{より } \bar{\beta} = 1 - \beta \text{ となり, } \text{に代入して } \alpha\bar{\alpha} - \beta\bar{\alpha} - \alpha(1 - \beta) = 0$$

$$\alpha\bar{\alpha} - \beta\bar{\alpha} - \alpha + \alpha\beta = 0, \quad (\alpha - \bar{\alpha})\beta = \alpha(1 - \bar{\alpha})$$

$$\alpha \text{ は実数でないので } \alpha \neq \bar{\alpha} \text{ となり, } \beta = \frac{\alpha(1 - \bar{\alpha})}{\alpha - \bar{\alpha}} \dots\dots\dots$$

(3) (1)より, $z = \alpha$ として, $1 - \bar{\alpha} = \left(\frac{1}{2} + i\right)(\alpha - \bar{\alpha})$

$$\frac{1 - \bar{\alpha}}{\alpha - \bar{\alpha}} = \frac{1}{2} + i$$

を代入すると, $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{1}{2} + i$ となり, 一定の値をとる。

[解 説]

特別な技巧は必要なく, 誘導に従って解いていくことができます。(2)では, 共役複素数を利用した解法を考えなさいという出題者の意向が, 問題文から伝わってきます。