1

問題のページへ

(1)　$a_n = \dfrac{2S_n{}^2}{2S_n - 1}$ ……①に $n = 2$ を代入すると，$a_2 = \dfrac{2S_2{}^2}{2S_2 - 1} = \dfrac{2(a_1 + a_2)^2}{2(a_1 + a_2) - 1}$

$a_1 = \dfrac{1}{2}$ より，$2a_2\left(\dfrac{1}{2} + a_2\right) - a_2 = 2\left(\dfrac{1}{2} + a_2\right)^2$ となり，$a_2 = -\dfrac{1}{4}$

(2)　$n \geqq 2$ で，$a_n = S_n - S_{n-1}$ より，①から，$\dfrac{2S_n{}^2}{2S_n - 1} = S_n - S_{n-1}$

$$2S_n{}^2 = (S_n - S_{n-1})(2S_n - 1),\ (2S_{n-1} + 1)S_n = S_{n-1} \cdots\cdots\cdots②$$

ここで，$S_{n-1} = -\dfrac{1}{2}$ とすると②は不成立なので，$S_n = \dfrac{S_{n-1}}{2S_{n-1} + 1}$ ………③

(3)　ある n で $S_n = 0$ とすると，③より $S_{n-1} = 0$ となり，帰納的に $S_1 = 0$ となるが，これは $S_1 = a_1 = \dfrac{1}{2}$ に反する。よって，どんな n に対しても $S_n \neq 0$ である。

③より，$\dfrac{1}{S_n} = \dfrac{2S_{n-1} + 1}{S_{n-1}} = 2 + \dfrac{1}{S_{n-1}}$ なので，

$$\frac{1}{S_n} = \frac{1}{S_1} + 2(n-1) = 2 + 2(n-1) = 2n,\ S_n = \frac{1}{2n}$$

(4)　①より，$n \geqq 2$ で，$a_n = \dfrac{2 \cdot \dfrac{1}{4n^2}}{2 \cdot \dfrac{1}{2n} - 1} = \dfrac{1}{2n - 2n^2} = \dfrac{1}{2n(1-n)}$

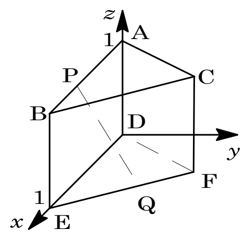
[解 説]

いわゆる和と一般項の関係を用いる問題です。(1)から(3)まで，親切すぎるほどの誘導がついています。

2

問題のページへ

(1) △ABC および△DEF は 1 辺の長さが 1 の正三角形であり，$\mathrm{AP}=t$ のとき $\mathrm{EQ}=t$ となるので，点 Q は EF を $t:1-t$ に内分する。



$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OE}}+t\overrightarrow{\mathrm{OF}}=\left(1-\frac{1}{2}t,\ \frac{\sqrt{3}}{2}t,\ 0\right)$$

よって，点$\mathrm{Q}\left(1-\frac{1}{2}t,\ \frac{\sqrt{3}}{2}t,\ 0\right)$となる。

(2) 条件より $\mathrm{P}(t,\ 0,\ 1)$ となり，線分 PQ を $1-a:a$ に内分する点が $\mathrm{R}(t)$ なので，

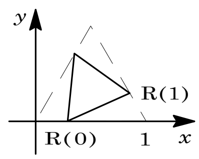
$$\overrightarrow{\mathrm{OR}(t)}=a\overrightarrow{\mathrm{OP}}+(1-a)\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\left(1-a+\frac{1}{2}(3a-1)t,\ \frac{\sqrt{3}}{2}(1-a)t,\ a\right)$$

よって，点$\mathrm{R}(t)\left(1-a+\frac{1}{2}(3a-1)t,\ \frac{\sqrt{3}}{2}(1-a)t,\ a\right)$となる。

(3) (2)より，$\overrightarrow{\mathrm{OR}(t)}=(1-a,\ 0,\ a)+\frac{t}{2}(3a-1,\ \sqrt{3}(1-a),\ 0)$

これより，点 $\mathrm{R}(t)$ は平面 $z=a$ 上で，点 $(1-a,\ 0,\ a)$ を通り，方向ベクトル $(3a-1,\ \sqrt{3}(1-a),\ 0)$ の直線を描く。

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{OR}(0)}=(1-a,\ 0,\ a)$，$\overrightarrow{\mathrm{OR}(1)}=\left(\frac{a+1}{2},\ \frac{\sqrt{3}(1-a)}{2},\ a\right)$ となり，$0\leqq t\leqq 1$ のとき点 $\mathrm{R}(t)$ は 2 点 $\mathrm{R}(0)$，$\mathrm{R}(1)$ を両端点とする線分を描く。



さて，点 P が BC 上で点 Q が FD 上のとき，および点 P が CA 上で点 Q が DE 上のときも同様に考えると，平面 $z=a$ による K の切り口は，1 辺の長さが $\mathrm{R}(0)\mathrm{R}(1)$ の正三角形となる。

$$\left\{\mathrm{R}(0)\mathrm{R}(1)\right\}^2=\left\{\frac{a+1}{2}-(1-a)\right\}^2+\left\{\frac{\sqrt{3}(1-a)}{2}\right\}^2=3a^2-3a+1$$

よって，$S(a)=\frac{1}{2}\left\{\mathrm{R}(0)\mathrm{R}(1)\right\}^2\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{4}(3a^2-3a+1)$

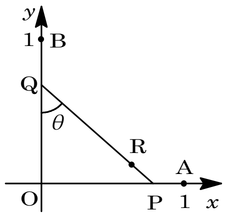
(4) (3)より，$V=\int_0^1 S(a)\,da=\frac{\sqrt{3}}{4}\int_0^1(3a^2-3a+1)\,da=\frac{\sqrt{3}}{4}\left[a^3-\frac{3}{2}a^2+a\right]_0^1=\frac{\sqrt{3}}{8}$

[解 説]

本問は，数年前までは頻出問題の 1 つでした。記憶を辿って調べたところ，86 年京大で，文理共通問題として全く同じ問題が出ていました。現行課程では消滅したと思って，作成したテキストなどからは削除していたのですが。

3

問題のページへ



(1)　$\mathrm{PQ}=1$ より，$\mathrm{OP}=\sin\theta$，$\mathrm{OQ}=\cos\theta$，$\mathrm{AP}=1-\sin\theta$

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+(1-\sin\theta)\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$$
$$=(\sin\theta,\ 0)+(1-\sin\theta)(-\sin\theta,\ \cos\theta)$$
$$=\left(\sin^2\theta,\ (1-\sin\theta)\cos\theta\right)$$

よって，$\mathrm{R}\left(\sin^2\theta,\ (1-\sin\theta)\cos\theta\right)$となる。

(2)　(1)より，点 $\mathrm{R}(x,\ y)$ の軌跡をパラメータ表示すると，

$$x=\sin^2\theta,\ \ y=(1-\sin\theta)\cos\theta\quad\left(0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}\right)$$

この曲線と x 軸, y 軸によって囲まれる図形の面積を S とすると,

$$S=\int_0^1 y\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin\theta)\cos\theta\cdot 2\sin\theta\cos\theta\,d\theta$$
$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\theta\cos^2\theta-\sin^2\theta\cos^2\theta)\,d\theta$$

ここで，$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos^2\theta\,d\theta=-\frac{1}{3}\Big[\cos^3\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{1}{3}\cdot(-1)=\frac{1}{3}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\cos^2\theta\,d\theta=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2\theta\,d\theta=\frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos4\theta)\,d\theta=\frac{1}{8}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{16}$$

よって，$S=2\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{\pi}{16}\right)=\dfrac{2}{3}-\dfrac{\pi}{8}$

[解 説]

パラメータ曲線ではさまれた領域の面積を求めるという問題です。文中の誘導を利用すれば, スムーズに値が求まります。

4

問題のページへ

(1) $X^2=\begin{pmatrix}2&1\\-4&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\-4&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$

(2) $B=\begin{pmatrix}2.1&1\\-4&-1.9\end{pmatrix}$とすると，$|B|=2.1\times(-1.9)-1\times(-4)=0.01$なので,

$$A=B^{-1}=\frac{1}{0.01}\begin{pmatrix}-1.9&-1\\4&2.1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-190&-100\\400&210\end{pmatrix}\cdots\cdots\cdots①$$

また，$A=pE+qX=p\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+q\begin{pmatrix}2&1\\-4&-2\end{pmatrix}\cdots\cdots\cdots②$

①②より，$q=-100$，$p=10$となり，$A=10E-100X$

(3) (1)より，$X^2=O$なので, $n\geqq 2$で$X^n=O$となる。

$$A^n=(10E-100X)^n=10^n(E-10X)^n=10^n(E-{}_n\mathrm{C}_1 10X)$$
$$=10^n(E-10nX)=10^n\begin{pmatrix}1-20n&-10n\\40n&1+20n\end{pmatrix}$$

最大の成分をa_nとすると，$a_n=10^n\cdot 40n=4n\cdot 10^{n+1}$

$a_7=28\times 10^8=2.8\times 10^9$，$a_8=32\times 10^9=3.2\times 10^{10}$

よって，a_nが10^{10}を超える最小の自然数nは8である。

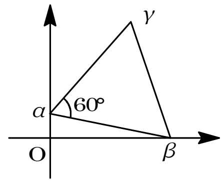
[解 説]

いかにも計算がややこしそうな小数成分の行列が題材となっています。しかし，逆行列を求めた途端，それは杞憂にすぎないことがわかりました。

5

問題のページへ

(1)　条件より，点γは，点αを中心として点βを$60°$回転した点なので，



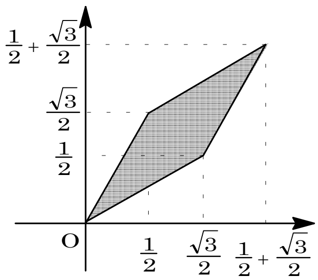
$$\gamma-\alpha=(\cos 60°+i\sin 60°)(\beta-\alpha)$$

$$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\cos 60°+i\sin 60°=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

(2)　(1)より，$\gamma=\alpha+\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(\beta-\alpha)=si+\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(t-si)$

$$=\left(\frac{1}{2}t+\frac{\sqrt{3}}{2}s\right)+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t+\frac{1}{2}s\right)i=s\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)+t\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

ここで，$(s,\ t)=(0,\ 0)$のとき$\gamma=0$，$(s,\ t)=(1,\ 0)$のとき$\gamma_1=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$，$(s,\ t)=(0,\ 1)$のとき$\gamma_2=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$，$(s,\ t)=(1,\ 1)$のとき$\gamma_3=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)i$



すると，$0<s<1$，$0<t<1$から，点γは線分$\mathrm{O}\gamma_1$，線分$\mathrm{O}\gamma_2$を隣りあう 2 辺とするひし形$\mathrm{O}\gamma_1\gamma_3\gamma_2$の内部を描き，図示すると右図の網点部のようになる。なお，境界は領域に含まない。

[解 説]

文系に類題が出題されています。理系の本問では，独立に変化するパラメータが 2 つあるので，点γが動いてできる図形は 2 次元的な広がりをもちます。