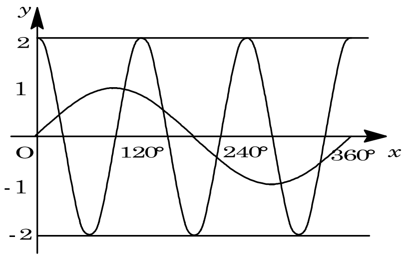
第１問 [1]

問題のページへ

$y=2\cos 3x$ の周期は $\dfrac{360°}{3}=120°$ である。



右図より，$0° \leqq x \leqq 360°$ のとき，$y=2$ となる x は $0°$，$120°$，$240°$，$360°$ の 4 個。

また，$y=-2$ となる x は $60°$，$180°$，$300°$ の 3 個。

さらに，$y=\sin x$ と $y=2\cos 3x$ のグラフは共有点を 6 個もつので，方程式 $\sin x=2\cos 3x$ は 6 個の解をもつ。

[解 説]

誘導に従ってグラフを書けば，一目瞭然という問題です。空欄を埋めるのに，計算はほとんど不要です。

第１問 [2]

問題のページへ

まず，$y^2 - z^2 = (y+z)(y-z) = 10\cdot 3^x \cdot 4\cdot 3^{-x} = 40$

$z = 0$とすると，$5\cdot 3^x - 2\cdot 3^{-x} = 0$から，$5\cdot(3^x)^2 - 2 = 0$

$3^x > 0$なので，$3^x = \sqrt{\dfrac{2}{5}}$ ………①

ここで，相加平均と相乗平均の関係より，

$$y = 5\cdot 3^x + 2\cdot 3^{-x} \geqq 2\sqrt{5\cdot 3^x \cdot 2\cdot 3^{-x}} = 2\sqrt{10} \text{ ………②}$$

等号が成立するのは，$5\cdot 3^x = 2\cdot 3^{-x}$のとき，すなわち$z = 0$のときである。

①より，$x = \log_3\sqrt{\dfrac{2}{5}} = \dfrac{1}{2}(\log_3 2 - \log_3 5)$

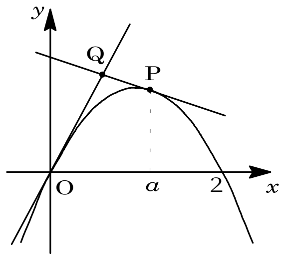
よって，$x = \dfrac{1}{2}(\log_3 2 - \log_3 5)$のとき，②から$y$は最小値$2\sqrt{10}$をとる。

[解 説]

相加平均と相乗平均の関係を用いて最小値を求めるという頻出タイプの問題です。上記の解もその方針で書きましたが，出題者の意図どおり$y^2 = z^2 + 40$という関係を利用しても構いません。

第2問

問題のページへ



(1) $y=-x^2+2x$ より，$y'=-2x+2$

P における接線 l_1 の方程式は,

$$y=(-2a+2)(x-a)+(-a^2+2a)$$
$$=2(1-a)x+a^2 \cdots\cdots\cdots ①$$

O における接線 l_2 の方程式は,

$$y=2x \cdots\cdots\cdots ②$$

①②の交点は，$2(1-a)x+a^2=2x$，$-2ax+a^2=0$

$a\neq 0$ より $x=\dfrac{a}{2}$，②から $y=a$ より，$\mathrm{Q}\left(\dfrac{a}{2},\ a\right)$

(2) $S_1=\displaystyle\int_0^{\frac{a}{2}}\left\{2x-(-x^2+2x)\right\}dx=\int_0^{\frac{a}{2}}x^2dx=\frac{a^3}{24}$

(3) 放物線 $y=px^2+qx+r$ が 3 点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{Q}\left(\dfrac{a}{2},\ a\right)$，$\mathrm{P}(a,\ -a^2+2a)$ を通るので,

$$r=0\cdots\cdots ③,\ \frac{a^2}{4}p+\frac{a}{2}q+r=a\cdots\cdots ④,\ a^2p+aq+r=-a^2+2a\cdots\cdots ⑤$$

③④より，$a\neq 0$ なので，$\dfrac{a}{4}p+\dfrac{1}{2}q=1$，$q=2-\dfrac{a}{2}p$

③⑤より，$a\neq 0$ なので，$ap+q=-a+2$

よって，$ap+2-\dfrac{a}{2}p=-a+2$，$a\neq 0$ なので $p=-2$

$$q=2-\frac{a}{2}(-2)=a+2$$

このとき，$C_2: y=-2x^2+(a+2)x$

$$S_2=\int_0^a\left\{-2x^2+(a+2)x-(-x^2+2x)\right\}dx=\int_0^a -x(x-a)dx=\frac{a^3}{6}$$

よって，$S_2=4S_1$

[解 説]

昨年度の第 2 問と比べると，計算量が半分程度になっています。テクニカルな式変形もまったく必要でなく，平均点アップに大きく寄与した問題です。

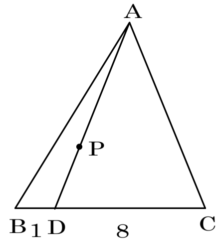
第3問

問題のページへ

$5\overrightarrow{PA}+a\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\vec{0}$ より，$-5\overrightarrow{AP}+a(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AP})+(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AP})=\vec{0}$

$$(a+6)\overrightarrow{AP}=a\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AP}=\frac{a}{a+6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{a+6}\overrightarrow{AC}$$



$\overrightarrow{AD}=k\overrightarrow{AP}$ とおくと，

$$\overrightarrow{AD}=\frac{ak}{a+6}\overrightarrow{AB}+\frac{k}{a+6}\overrightarrow{AC}$$

BD : DC = 1 : 8 より，$\dfrac{k}{a+6}:\dfrac{ak}{a+6}=1:8$

よって，$1:a=1:8$ から $a=8$

すると，$\overrightarrow{AP}=\dfrac{8}{14}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{14}\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AD}=\dfrac{8k}{14}\overrightarrow{AB}+\dfrac{k}{14}\overrightarrow{AC}$ となり，D が辺 BC 上にあることより，

$$\frac{8k}{14}+\frac{k}{14}=1,\quad k=\frac{14}{9}$$

よって，$\overrightarrow{AD}=\dfrac{14}{9}\overrightarrow{AP}$，$\overrightarrow{AP}=\dfrac{9}{14}\overrightarrow{AD}$

このとき，$AP:PD=1:(k-1)=9:5$

ここで，△ABC に余弦定理を適用して，

$$(\sqrt{10})^2=(2\sqrt{2})^2+(\sqrt{6})^2-2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{8+6-10}{2}=2$$

また，$\overrightarrow{AP}=\dfrac{1}{14}(8\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$ より，

$$|\overrightarrow{AP}|^2=\frac{1}{14^2}|8\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|^2=\frac{1}{14^2}\left\{64|\overrightarrow{AB}|^2+16\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+|\overrightarrow{AC}|^2\right\}$$

$$=\frac{1}{14^2}(64\cdot 8+16\cdot 2+6)=\frac{275}{98}$$

[解 説]

平面上のベクトルを題材とした頻出問題の一つです。たとえ誘導がなくても，解の方針に迷うことはありません。

第4問

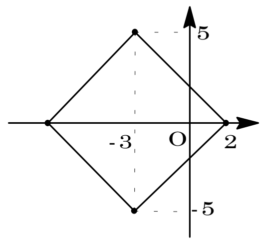
問題のページへ

$x=2$ が $x^3+ax^2+bx+c=0$ ……①の解なので，

$$8+4a+2b+c=0,\ \ c=-4a-2b-8\ \cdots\cdots ②$$

このとき①の左辺は，$x^3+ax^2+bx+c=(x-2)\left\{x^2+(a+2)x+2a+b+4\right\}$

α，β は $x^2+(a+2)x+2a+b+4=0$ ……③の解なので，α と β は共役であり，複素数平面上で実軸対称となる。



点 2，α，β が，一辺の長さが $5\sqrt{2}$ の正方形の頂点であり，しかも α，β の実部が負であるのは，右図から，$-3\pm5i$ である。

$$\alpha+\beta=(-3+5i)+(-3-5i)=-6$$

$$\alpha\beta=(-3+5i)(-3-5i)=34$$

③から解と係数の関係より，

$$-(a+2)=-6,\ \ 2a+b+4=34$$

よって，$a=4$，$b=22$

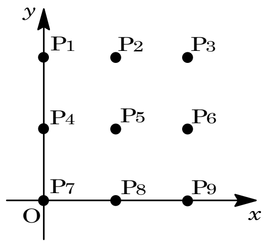
②より，$c=-68$

[解 説]

実数係数の整方程式が虚数解をもてば，それと共役な複素数も解となることを用いた問題です。その事実を複素数平面で味付けしています。

第 5 問

問題のページへ



異なる 9 個の玉から 2 個の玉を取り出す組合せ ${}_9\mathrm{C}_2=36$ 通りが同様に確からしいとする。

(1) $X=1$ となるのは，P_1P_2，P_2P_3，P_4P_5，P_5P_6，P_7P_8，P_8P_9，P_1P_4，P_2P_5，P_3P_6，P_4P_7，P_5P_8，P_6P_9 の 12 通りで，その確率は $\dfrac{12}{36}=\dfrac{1}{3}$ である。

(2) $X=5$ となるのは，P_1P_6，P_3P_4，P_4P_9，P_6P_7，P_1P_8，P_2P_7，P_2P_9，P_3P_8 の 8 通りで，その確率は $\dfrac{8}{36}=\dfrac{2}{9}$ である。

(3) $X=8$ となるのは，P_1P_9，P_3P_7 の 2 通りで，その確率は $\dfrac{2}{36}=\dfrac{1}{18}$ である。

(4) 同様に考えて，$X=2$ となるのが 8 通り，$X=4$ となるのが 6 通りで，以上合わせて 36 通りとなるので，確率変数 X は $X=1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 8$ と 5 通りの値をとる。

このとき, X の期待値を $E(X)$，分散を $V(X)$ とすると,

$$E(X)=1\times\frac{12}{36}+2\times\frac{8}{36}+4\times\frac{6}{36}+5\times\frac{8}{36}+8\times\frac{2}{36}=3$$

$$E(X^2)=1^2\times\frac{12}{36}+2^2\times\frac{8}{36}+4^2\times\frac{6}{36}+5^2\times\frac{8}{36}+8^2\times\frac{2}{36}=13$$

$$V(X)=E(X^2)-\left(E(X)\right)^2=4$$

[解 説]

総数が 36 通りしかないので，丁寧に数えあげていけば，数えもれは防げます。また，期待値や分散についても，計算量はさほど多くありません。

第 6 問

問題のページへ

(1)　$N = 10$ のとき，$1 \leqq J \leqq 9$，$J \leqq K \leqq 10$ で J, W, K の値の変化は次表のようになる。

J	1					2				
W	0	1	3	6	10	0	2	5	9	14
K	1	2	3	4		2	3	4	5	
出力	1	2	3	4	Yes	2	3	4	5	No

(2)　$N = 21$ のとき，$1 \leqq J \leqq 20$ となり，

$$21 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 6 + 7 + 8 = 10 + 11$$

これより，Yes が表示されるのは，$J = 1$，6，10 のときのみで 3 回，No が表示されるのは，$20 - 3 = 17$ 回となる。

(3)　奇数は連続 2 整数の和として表せるので，偶数だけ ($n = 2$，4，6，8) を調べる。

この中で，$n = 6$ のときは $6 = 1 + 2 + 3$ として連続 3 整数の和として表せるが，それ以外の数は連続する整数の和として表せない。

よって, Yes が 1 回も表示されないのは，$n = 2$，4，8 となる。

[解 説]

昨年の追試ほどではありませんが，4 題の選択題のなかではいちばん難しめです。数II B では数I A と異なり，コンピュータの問題を選択するには，それなりの覚悟が必要です。