第1問 [1]

問題のページへ

$y = x^2 - 4ax + 4a^2 - 4a - 3b + 9 = (x - 2a)^2 - 4a - 3b + 9$ より，

頂点$(2a,\ -4a - 3b + 9)$

(1) x軸と交わらない条件は，$-4a - 3b + 9 > 0$

$4a + 3b < 9$

a, b は自然数より，$a = 1$，$b = 1$

(2) $x^2 - 4ax + 4a^2 - 4a - 3b + 9 = 0$ より，

$(x - 2a)^2 = 4a + 3b - 9$

2つの解をもつ条件は，$4a + 3b - 9 \geqq 0$

このとき，$x = 2a \pm \sqrt{4a + 3b - 9}$

2つの解の差が$2\sqrt{11}$なので，$2\sqrt{4a + 3b - 9} = 2\sqrt{11}$

$4a + 3b - 9 = 11$，$4a + 3b = 20$

$3b = 4(5 - a)$ より，b は4の倍数となるので，$a = 2$，$b = 4$

(3) $y = x^2 - 4ax + 4a^2 - 4a - 3b + 9$ を y 軸方向に -3 だけ平行移動すると，

$y = (x^2 - 4ax + 4a^2 - 4a - 3b + 9) - 3 = x^2 - 4ax + 4a^2 - 4a - 3b + 6$

さらに，x軸に関して対称移動すると，

$-y = x^2 - 4ax + 4a^2 - 4a - 3b + 6$

$y = -x^2 + 4ax - 4a^2 + 4a + 3b - 6$

条件より，$y = -x^2 + 8x + 1$ と一致するので，

$4a = 8$，$-4a^2 + 4a + 3b - 6 = 1$

よって，$a = 2$，$b = 5$

[解 説]

(2)のような解の差に関連する問題が，これで3年連続の出題となりました。二度あることは三度あるということでしょう。また，(3)は数Ⅱ風の解を書きましたが，数Ⅰ風に頂点の移動に注目して解いても構いません。

第 1 問 [2]

問題のページへ

異なる 20 枚から 3 枚取り出す組合せ ${}_{20}\mathrm{C}_3$ 通りが同様に確からしいとする。

(1)　3 枚がすべて同じ番号となるのは，色の選び方が ${}_4\mathrm{C}_3$ 通りで番号の選び方が 5 通りより ${}_4\mathrm{C}_3\times 5$ 通りとなる。

その確率は，$\dfrac{{}_4\mathrm{C}_3\times 5}{{}_{20}\mathrm{C}_3}=\dfrac{4\cdot 5}{20\cdot 19\cdot 3}=\dfrac{1}{57}$

(2)　3 枚が色も番号もすべて異なるのは，色の選び方が ${}_4\mathrm{C}_3$ 通りで番号の選び方が ${}_5\mathrm{C}_3$ 通り，さらに色と番号の対応の仕方が $3!$ 通りより，${}_4\mathrm{C}_3\times{}_5\mathrm{C}_3\times 3!$ 通りとなる。

その確率は，$\dfrac{{}_4\mathrm{C}_3\times{}_5\mathrm{C}_3\times 3!}{{}_{20}\mathrm{C}_3}=\dfrac{4\cdot 10\cdot 6}{20\cdot 19\cdot 3}=\dfrac{4}{19}$

(3)　3 枚のうちに赤いカードが 1 枚含まれているのは，${}_5\mathrm{C}_1\times{}_{15}\mathrm{C}_2$ 通り。

その確率は，$\dfrac{{}_5\mathrm{C}_1\times{}_{15}\mathrm{C}_2}{{}_{20}\mathrm{C}_3}=\dfrac{5\cdot 15\cdot 7}{20\cdot 19\cdot 3}=\dfrac{35}{76}$

(4)　(3)と同様にして，赤いカードが 2 枚含まれている確率は，

$$\frac{{}_5\mathrm{C}_2\times{}_{15}\mathrm{C}_1}{{}_{20}\mathrm{C}_3}=\frac{10\cdot 15}{20\cdot 19\cdot 3}=\frac{10}{76}$$

赤いカードが 3 枚含まれている確率は，

$$\frac{{}_5\mathrm{C}_3}{{}_{20}\mathrm{C}_3}=\frac{10}{20\cdot 19\cdot 3}=\frac{2}{76\cdot 3}$$

よって，赤いカードの枚数の期待値は，

$$1\times\frac{35}{76}+2\times\frac{10}{76}+3\times\frac{2}{76\cdot 3}=\frac{57}{76}=\frac{3}{4}$$

[解 説]

よく見かける頻出問題の一つです。ところが，4 色のカードが 5 枚ずつあって，それから 3 枚取り出すという設定なので，3，4，5 という 3 つの数字に頭が混乱してしまい，落ち着かないとミスをしそうです。

第2問 [1]

問題のページへ

(1)　$B=A(A+c)+d$ より，

$$x^4+ax^3+bx^2+x+2=(x^2+x-1)(x^2+x-1+c)+d\cdots\cdots\cdots(*)$$

(＊)の右辺$=(x^2+x-1)^2+c(x^2+x-1)+d$

$$=x^4+2x^3+(c-1)x^2+(c-2)x+1-c+d$$

(＊)の左辺の係数と比較して，

$a=2$，$b=c-1$，$1=c-2$，$2=1-c+d$

よって，$a=2$，$b=2$，$c=3$，$d=4$

また，$x=\dfrac{-1+\sqrt{17}}{2}$ のとき，$2x+1=\sqrt{17}$，$(2x+1)^2=17$

$4x^2+4x+1=17$，$x^2+x-4=0$

よって，$A=x^2+x-1=(x^2+x-4)+3=3$

(＊)より，$B=A(A+3)+4=3\times(3+3)+4=22$

(2)　まず，与えられた命題を同値変形していくと，

①：$a+b>0 \Leftrightarrow b>-a$

②：$|a|+|b|>0 \Leftrightarrow |a|+|b|\neq 0 \Leftrightarrow (a,\ b)\neq(0,\ 0)$

③：$a+b>0$ かつ $ab>0 \Leftrightarrow a>0$ かつ $b>0$

④：2次関数 $y=x^2-ax+b$ のグラフが x 軸の正の部分と2点で交わる

$\Leftrightarrow a^2-4b>0$ かつ $a>0$ かつ $b>0 \Leftrightarrow a>0$ かつ $0<b<\dfrac{1}{4}a^2$

すると，「$a>0$ かつ $b>0$」と同値な条件は，「$a+b>0$ かつ $ab>0$」である。

また，「2次関数 $y=x^2-ax+b$ のグラフが x 軸の正の部分と2点で交わる」ことは他のすべての条件の十分条件であり，「$|a|+|b|>0$」は他のすべての条件の必要条件である。

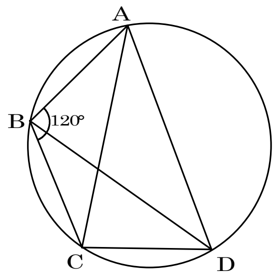
さらに，「$a>0$ かつ $b>0$」の否定と同値な条件は，「$a+b>0$ かつ $ab>0$」の否定，すなわち「$a+b\leqq 0$ または $ab\leqq 0$」である。

[解 説]

(1)は昨年の第 2 問[1]の類題です。この設問だけだと余りにも変化がないので，(2)という別問を追加したのかもしれませんが，このために問題量がかなり増えてしまいました。なお，この(2)をすばやく解くには，領域の考え方が必要です。昨年も，数Ⅰで軌跡を求める問題が出ましたが，範囲外である数Ⅱの「図形と式」分野の考え方が 2 年連続で必要となっています。

第 2 問 [2]

問題のページへ



$\triangle$ABC に余弦定理を適用して,

$$\mathrm{AC}^2=(2\sqrt{2})^2+(2\sqrt{2})^2-2\cdot(2\sqrt{2})^2\cos 120^\circ=24$$

よって, $\mathrm{AC}=2\sqrt{6}$

また, $\angle\mathrm{BDC}=\angle\mathrm{BAC}=\dfrac{1}{2}(180^\circ-120^\circ)=30^\circ$

ここで, $\mathrm{AD}=x$ とおき, $\triangle$ABD に余弦定理を適用して,

$$(2\sqrt{2})^2=x^2+(2\sqrt{3})^2-2x\cdot 2\sqrt{3}\cos 30^\circ$$

$$x^2-6x+4=0,\ x=3\pm\sqrt{5}$$

さらに, $\mathrm{CD}=y$ とおき, $\triangle$BCD に余弦定理を適用して,

$$(2\sqrt{2})^2=y^2+(2\sqrt{3})^2-2y\cdot 2\sqrt{3}\cos 30^\circ$$

$$y=3\pm\sqrt{5}$$

$x>y$ なので, $x=\mathrm{AD}=3+\sqrt{5}$, $y=\mathrm{CD}=3-\sqrt{5}$

これから, 四角形 ABCD の面積 S は,

$$S=\frac{1}{2}(2\sqrt{2})^2\sin 120^\circ+\frac{1}{2}(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})\sin 60^\circ=3\sqrt{3}$$

[解 説]

本問も昨年の第 2 問[2]と同じく, 円に内接する四角形が題材となっています。内容は余弦定理と面積公式の適用だけで, 昨年のように最後の空欄でズドンとくるような難問はありませんでした。

第3問

問題のページへ

等差数列$\{a_n\}$の一般項は,

$$a_n = -100 + (n-1)\cdot 5 = 5n - 105 = 5(n-21)$$

また, 第n区画の末項までの項数は,

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots\cdots + 2^{n-1} = \frac{2^n - 1}{2-1} = 2^n - 1$$

(1)　第$m-1$区画の末項までの項数は$2^{m-1}-1$なので, 第 m 区画の初項までの項数は2^{m-1}となる。

よって, $b_m = a_{2^{m-1}} = 5(2^{m-1} - 21)$

すると, $b_8 = 5(2^7 - 21) = 535$

$$b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_8 = \sum_{k=1}^{8} b_k = \sum_{k=1}^{8} 5(2^{k-1} - 21)$$

$$= 5\cdot\frac{2^8 - 1}{2-1} - 5\cdot 21\cdot 8 = 435$$

(2)　第 6 区画末項までの項数は$2^6 - 1 = 63$, 第 6 区画初項までの項数は$2^5 = 32$となることより, 第6区画に入る項の和は,

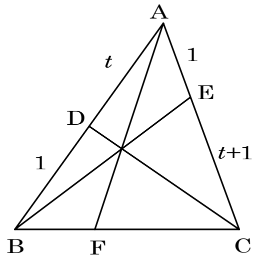
$$a_{32} + a_{33} + \cdots\cdots + a_{63} = \frac{a_{32} + a_{63}}{2} \times 32 = \frac{5\cdot 11 + 5\cdot 42}{2} \times 32 = 4240$$

[解 説]

群数列の問題に対しては, まず第 n 群末項までの項数を求めておいてから, 個々の設問を読むというのが正しい姿勢です。本問もこれだけですが, 3 題の選択題のなかではいちばん計算に時間がかかります。

第 4 問

問題のページへ



(1)　DE // BC のとき，AD : DB = AE : EC より，

$$t : 1 = 1 : (t+1),\ t(t+1) = 1,\ t^2 + t - 1 = 0$$

$t > 0$ より，$t = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

(2)　まず，$S_1 : S_2 = \mathrm{BF} : \mathrm{FC}$ ………①

また，$S_1 = \dfrac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AF}\cdot\sin\angle\mathrm{BAF}$，

$S_2 = \dfrac{1}{2}\mathrm{AC}\cdot\mathrm{AF}\cdot\sin\angle\mathrm{FAC}$ より，

$$S_1 : S_2 = \mathrm{AB}\sin\angle\mathrm{BAF} : \mathrm{AC}\sin\angle\mathrm{FAC}$$ ………②

ここで, AF が△ABC の内心を通るとき，$\angle\mathrm{BAF} = \angle\mathrm{FAC}$ なので,

①②より，BF : FC = AB : AC ………③

△ABC にチェバの定理を適用すると，$\dfrac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}}\cdot\dfrac{\mathrm{BF}}{\mathrm{FC}}\cdot\dfrac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}} = 1$ となり，条件から，

$\dfrac{t}{1}\cdot\dfrac{\mathrm{BF}}{\mathrm{FC}}\cdot\dfrac{t+1}{1} = 1$，BF : FC = $1 : t(t+1)$ ………④

さらに AC = 12AB のとき，AB : AC = 1 : 12 ………⑤

③④⑤より，$1 : t(t+1) = 1 : 12$

$$t(t+1) = 12,\ t^2 + t - 12 = 0$$

$t > 0$ より，$t = 3$

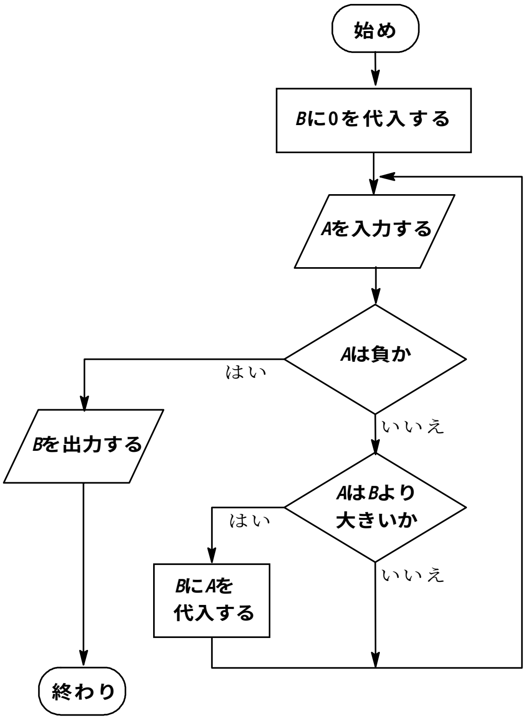
[解 説]

図を書いた瞬間, チェバの定理を使うだろうということは推測できます。しかし, 最後の空欄を埋めるときまでその出番がなかったのは意外でした。

第5問

問題のページへ

(1)　流れ図は次のようになる。



(2)　B の値の変化は次の表のようになる。

B の値	0	15	15	16	16	20	20	99	99
A の入力値	15	13	16	16	20	1	99	19	-1

よって，B の値は 4 回変化し，A に負の値 -1 を入力したとき 99 なので，「B に A を代入する」は 4 回実行され，99 が出力される。

[解 説]

注目されるコンピュータですが，本年はプログラムではなく流れ図でした。内容は基本的ですので，数Ⅰ A のみの受験で，しかも数列嫌いの文系受験者にはお薦めの問題です。