第１問　[1]

問題のページへ

$5\cdot 2^{-x}+2^{x+3}=2a\cdots\cdots$①より，$5\cdot\dfrac{1}{2^x}+8\cdot 2^x=2a$

$2^x=t$ とおくと，$\dfrac{5}{t}+8t=2a$，変形して，$t^2-\dfrac{a}{4}t+\dfrac{5}{8}=0\cdots\cdots$②

$$\left(t-\frac{a}{8}\right)^2-\frac{a^2}{64}+\frac{5}{8}=0,\ \left(t-\frac{a}{8}\right)^2+\frac{40-a^2}{64}=0$$

$\left(t-\dfrac{a}{8}\right)^2=\dfrac{a^2-40}{64}$ として，②が２個の解をもつのは $a^2-40>0$ のときである。

すなわち，$a>0$ から，$a>2\sqrt{10}$

また，$a=2\sqrt{10}$ のとき，②は重解 $t=\dfrac{a}{8}=\dfrac{\sqrt{10}}{4}$ をもつ。

このとき，$2^x=\dfrac{\sqrt{10}}{4}$，$x=\log_2\dfrac{\sqrt{10}}{4}=\dfrac{1}{2}\log_2(2\cdot 5)-2\log_2 2=\dfrac{1}{2}(\log_2 5-3)$

[解 説]

難易としては，基本事項の確認程度ですが，不適切な設問が入っています。

したがって，$a>\boxed{\text{ク}}\sqrt{\boxed{\text{ケコ}}}$ のとき方程式②は２個の解をもつ

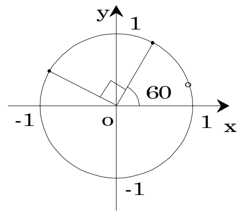
というところです。この表現の意味するところについては，２ つの解釈が考えられます。１つは，考えるべきなのは ２ 次方程式②だけであり，その元となっている指数方程式①は考慮しなくてよいという解釈であり，もう １ つは，やはり元の指数方程式①から考え，$2^x=t>0$ から ２ 次方程式②が正の ２ 解をもつという解釈です。結果としては，$a>0$ のためどちらの解釈でも同じ結論になりますが，題意が不明瞭と言わざるを得ません。それとも「方程式②は２個の解をもつ」は「方程式①は２個の解をもつ」の出題ミスなのでしょうか。こう考えた方がスッキリします。というのも，こうすると虚数解については考慮しなくてもよいことになりますので。

さらに，「方程式は２個の解をもつ」というときは，その２個に重解の場合を含むというのが普通の立場なのですが，ここではそうなっていません。それは答の形式が，$a>$ ......となっていて，$a\geqq$ ......となっていないからです。問題文を「方程式は異なる２個の解をもつ」と書き換えなくては，首尾一貫とは言えません。この点も「問題」です。

このように次々と疑問の湧いてくる本問は，いままでのセンター試験ではあまり見られなかったような雑な出題となっており，「玉」ではなく「石」と言ってもよい内容です。

第1問　[2]

問題のページへ



(1)　$f(60^\circ)=\sqrt{6}\cdot\dfrac{1}{2}+\sqrt{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{6}$

(2)　$f(\theta)=\sqrt{2}\sin\theta+\sqrt{6}\cos\theta=2\sqrt{2}\sin(\theta+60^\circ)$

$0^\circ\leqq\theta\leqq 90^\circ$ より，$60^\circ\leqq\theta+60^\circ\leqq 150^\circ$

これより，$\theta+60^\circ=150^\circ$，すなわち，$\theta=90^\circ$ のとき，

$f(\theta)$ は最小値 $f(90^\circ)=\sqrt{6}\cdot 0+\sqrt{2}\cdot 1=\sqrt{2}$ をとる。

(3)　$g(\theta)=\sqrt{2}(\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta)=\sqrt{2}\cdot 2\left(\cos\theta\cdot\dfrac{1}{2}-\sin\theta\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

ここで，$\cos\alpha=\dfrac{1}{2}$，$\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を満たす α として，$\alpha=60^\circ$ がとれるので，

$$g(\theta)=2\sqrt{2}(\cos\theta\cos 60^\circ-\sin\theta\sin 60^\circ)=2\sqrt{2}\cos(\theta+60^\circ)$$

とくに，$g(\theta)=-\dfrac{8\sqrt{2}}{5}$ ならば，$2\sqrt{2}\cos(\theta+60^\circ)=-\dfrac{8\sqrt{2}}{5}$，$\cos(\theta+60^\circ)=-\dfrac{4}{5}$

$60^\circ\leqq\theta+60^\circ\leqq 150^\circ$ より，$\sin(\theta+60^\circ)>0$ から，

$$\sin(\theta+60^\circ)=\sqrt{1-\left(-\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{3}{5}$$

(2)より，$f(\theta)=2\sqrt{2}\cdot\dfrac{3}{5}=\dfrac{6\sqrt{2}}{5}$

このとき，$f(\theta)=\sqrt{6}\cos\theta+\sqrt{2}\sin\theta=\dfrac{6\sqrt{2}}{5}$……①

$$g(\theta)=\sqrt{2}\cos\theta-\sqrt{6}\sin\theta=-\frac{8\sqrt{2}}{5}\text{……②}$$

①$\times\sqrt{2}$ − ②$\times\sqrt{6}$ より，

$$(2+6)\sin\theta=\frac{6\cdot 2}{5}+\frac{8\cdot 2\sqrt{3}}{5}，\text{よって，}\sin\theta=\frac{3+4\sqrt{3}}{10}$$

[解 説]

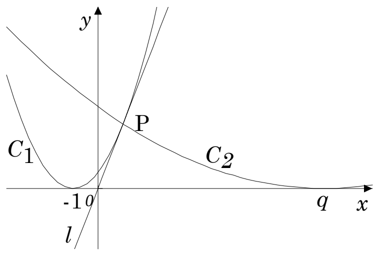
(1)　これは数値計算だけです。

(2)　三角関数の合成の問題です。上の解では普通にサインで合成しています。コサインの方でも構いませんが，そうすると次の(3)が途中からしんどくなってしまいます。

(3)　コサインでの合成がまず出てきます。サインでの合成と同じように加法定理をもとに変形すればよいのですが，サインでの合成を機械的に暗記していただけでは，てこずってしまいます。知識の隙間をねらった問題です。なお，これができれば，後は誘導に乗っていけます。

第 2 問

問題のページへ



(1) $C_1 : y = k(x+1)^2 \cdots\cdots$ ①，$l : y = 2ax \cdots\cdots$ ②

として，

①と②が接することより，

$$k(x+1)^2 = 2ax$$

$$kx^2 + 2(k-a)x + k = 0 \cdots\cdots ③$$

③が重解をもつことより，

$D/4 = (k-a)^2 - k^2 = 0$，$a>0$ より，$k = \dfrac{a}{2}$

このとき，接点 P の x 座標は，③より $x = -\dfrac{k-a}{k} = -\left(1-\dfrac{a}{k}\right) = -1 + a\cdot\dfrac{2}{a} = 1$

②より，$y = 2a$ なので，$\mathrm{P}(1,\ 2a)$，また $C_1 : y = \dfrac{a}{2}(x+1)^2 \cdots\cdots$ ①′

次に，$C_2 : y = p(x-q)^2 \cdots\cdots$ ④の P における接線と②が直交することより，

C_2 の P における接線の傾きは $\dfrac{-1}{2a}$，また④から $y' = 2p(x-q) \cdots\cdots$ ⑤

C_2 は $x=1$ のとき，$y = 2a$ なので，④から，$2a = p(1-q)^2 \cdots\cdots$ ⑥

C_2 は $x=1$ のとき，$y' = \dfrac{-1}{2a}$ なので，⑤から，$\dfrac{-1}{2a} = 2p(1-q) \cdots\cdots$ ⑦

⑦より，$1-q = \dfrac{-1}{4ap}$，⑥に代入して，$2a = p\cdot\dfrac{1}{16a^2p^2}$，$p = \dfrac{1}{32a^3}$

また，⑦より $q = 1 + \dfrac{1}{4ap} = 1 + \dfrac{1}{4a\cdot\dfrac{1}{32a^3}} = 1 + 8a^2$

(2) (1)より，$C_1 : y = \dfrac{a}{2}(x+1)^2$，$C_2 : y = \dfrac{1}{32a^3}(x-q)^2 \quad (q = 1+8a^2)$

$$S_1 = \int_{-1}^{1} \frac{a}{2}(x+1)^2 dx = \frac{a}{2}\cdot\frac{1}{3}\Big[(x+1)^3\Big]_{-1}^{1} = \frac{a}{6}\cdot 2^3 = \frac{4}{3}a$$

$$S_2 = \int_{1}^{q} \frac{1}{32a^3}(x-q)^2 dx = \frac{1}{32a^3}\cdot\frac{1}{3}\Big[(x-q)^3\Big]_{1}^{q} = \frac{1}{96a^3}(q-1)^3 = \frac{16}{3}a^3$$

したがって，$3S_1 = S_2$ となるのは，$3\cdot\dfrac{4}{3}a = \dfrac{16}{3}a^3$，$a>0$ より，$a = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

[解 説]

(1) 上の解の⑤を導くところは，数学IIIの範囲の公式です。これを用いなくてもできますが，計算の方向性が見えにくくなります。

(2) (1)と同じく，積分計算で数学IIIの範囲の公式を用いています。ただ(1)と異なり，(2)では，時間内（18 分）に最後の設問の答まで行き着くにはどうしてもこの公式を利用せざるを得ません。本問もまた規制緩和の 1 つとなっています。

第 3 問

問題のページへ

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=1\cdot1\cdot\cos 90^\circ=0$……①，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=1\cdot1\cdot\cos 60^\circ=\dfrac{1}{2}$……②

また，$\overrightarrow{\mathrm{PG}}=\overrightarrow{\mathrm{OG}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OD}})-\dfrac{1}{3}(2\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OE}})$

$$=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OD}}-\frac{2}{3}(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}})-\frac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OD}})=-\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OD}}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{PG}}+a\overrightarrow{\mathrm{GE}}=-\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OD}}+a\overrightarrow{\mathrm{CA}}$$

$$=-\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OD}}+a(\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}})=(a-1)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\left(\frac{1}{3}-a\right)\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OD}}$$

ここで，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|=1$……③，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=0$……④

①～④を用いて，

$$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2=(a-1)^2|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+\left(\frac{1}{3}-a\right)^2|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2+\frac{4}{9}|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|^2+\frac{4}{3}\left(\frac{1}{3}-a\right)\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}$$

$$=(a-1)^2+\left(\frac{1}{3}-a\right)^2+\frac{4}{9}+\frac{4}{3}\left(\frac{1}{3}-a\right)\cdot\frac{1}{2}=2a^2-\frac{10}{3}a+\frac{16}{9}$$

すると，$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|=\sqrt{2a^2-\dfrac{10}{3}a+\dfrac{16}{9}}=\sqrt{2\left(a-\dfrac{5}{6}\right)^2+\dfrac{7}{18}}$ から，

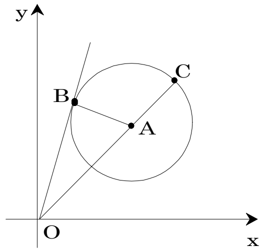
$a=\dfrac{5}{6}$ のとき，$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|$ は最小値 $\sqrt{\dfrac{7}{18}}=\dfrac{\sqrt{14}}{6}$ をとる。

[解 説]

空間ベクトルの内容で，うまく誘導がついています。この誘導に乗っていけば，最後の設問が少々計算が複雑ですが，12 分間で完答できる内容となっています。数学Ⅰ・数学 A の第 4 問のようなオーソドックスな出題です。

第 4 問

問題のページへ



(1) 原点 O と点 A(α) との距離は,

$$\sqrt{(2\sqrt{2})^2+(2\sqrt{2})^2}=4$$

点 A(α) を中心とし，半径 2 の円周上にある点で，

点 O との距離が最大になるものを C(γ) とすると，

$$|\gamma|=|\alpha|+2=4+2=6,\ \arg\gamma=\arg\alpha=45^\circ$$

$$\gamma=6(\cos 45^\circ+i\sin 45^\circ)=3\sqrt{2}(1+i)$$

(2) 偏角が最大となる点を B(β) とすると，

OA $=4$，AB $=2$，$\angle$ABO $=90^\circ$ より，

$$\sin\angle AOB=\frac{2}{4}=\frac{1}{2},\ \angle AOB=30^\circ,\ OB=2\sqrt{3}$$

$$\left|\frac{\beta}{\alpha}\right|=\frac{|\beta|}{|\alpha|}=\frac{2\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2},\ \arg\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)=\arg\beta-\arg\alpha=30^\circ$$

これより，$\dfrac{\beta}{\alpha}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}(\cos 30^\circ+i\sin 30^\circ)=\dfrac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{3}+i)$

$$\beta=\frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{3}+i)\alpha=\frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{3}+i)\cdot 2\sqrt{2}(1+i)=\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}+\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}i$$

また，$\arg\beta=\arg\alpha+30^\circ=45^\circ+30^\circ=75^\circ$，これより，$\arg\beta^n=75^\circ\times n$

β^n が実数となるのは，偏角が $180^\circ\times m$（m は整数）のときなので，

$$75^\circ\times n=180^\circ\times m,\ 5n=12m$$

5 と 12 は互いに素なので，$m=5k$，$n=12k$（k は整数）と表せる。

$$1\leqq n\leqq 100 \text{ より，} 1\leqq 12k\leqq 100,\ \frac{1}{12}\leqq k\leqq 8+\frac{1}{3}$$

k は整数なので，$k=1,\ 2,\cdots\cdots,8$ となり，求める n の個数は 8 である。

[解 説]

(1) 絶対値が最大となる複素数を，図形的に考えられるかどうかが問われています。昨年のセンター試験の問題よりはかなり難しくなっています。

(2) 偏角が最大となる複素数を求めるもので，(1)と同じく，計算だけで押し通していくのではなく，円と接線の関係を利用し，図形的な処理をするものです。さらに，最後の設問で，ド・モアブルの定理や整数問題が絡み合って複雑さが増しています。そのため本問は, 2 次試験レベルの問題といっても差し支えありません。なお，この第 4 問だけでなく，次の第 5 問，第 6 問に整数問題が出ているのは注目すべきことです。これで教科書には載っていない整数問題が 3 年連続で出題されたことになります。

第5問

問題のページへ

［1］二人をA, Bとして, Aの位置を固定して考える。すると, Bの座り方の11通りを同様に確からしいとする。

$X=0$となるのは, A, Bが隣りあって座る場合より，$P(X=0)=\dfrac{2}{11}$

$X=1$となるのは, A, Bが1つおいて座る場合より，$P(X=1)=\dfrac{2}{11}$

$X=5$となるのは, A, Bが対面の位置に座る場合より，$P(X=5)=\dfrac{1}{11}$

また$X=2,\ 3,\ 4$の場合は，$X=0,\ 1$の場合と同じく,

$$P(X=2)=P(X=3)=P(X=4)=\frac{2}{11}$$

よって，$E(X)=0\times\dfrac{2}{11}+1\times\dfrac{2}{11}+2\times\dfrac{2}{11}+3\times\dfrac{2}{11}+4\times\dfrac{2}{11}+5\times\dfrac{1}{11}=\dfrac{25}{11}$

また，$E(X^2)=0^2\times\dfrac{2}{11}+1^2\times\dfrac{2}{11}+2^2\times\dfrac{2}{11}+3^2\times\dfrac{2}{11}+4^2\times\dfrac{2}{11}+5^2\times\dfrac{1}{11}=\dfrac{85}{11}$

以上より，$V(X)=E(X^2)-(E(X))^2=\dfrac{85}{11}-\left(\dfrac{25}{11}\right)^2=\dfrac{310}{121}$

［2］a 個の席のあるテーブルで隣りあって座る確率は，二人がともにこのテーブルを選んでしかも隣りあう場合より,［1］の結果を用いて,

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{2}{a-1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{a-1}$$

b 個の席のあるテーブルで隣りあって座る確率も同様にして,

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{2}{b-1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{b-1}$$

これより，$p(a,\ b)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{a-1}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{b-1}$

ここで，$p(a,\ b)=\dfrac{1}{14}$となるのは，$\dfrac{1}{a-1}+\dfrac{1}{b-1}=\dfrac{1}{7}$，$\dfrac{(a-1)+(b-1)}{(a-1)(b-1)}=\dfrac{1}{7}$

$$(a-1)(b-1)-7(a-1)-7(b-1)=0$$

$$(a-1-7)(b-1-7)=49,\ (a-8)(b-8)=49$$

したがって，$a=b$ならば，$(a-8)^2=49$，$a-8=\pm7$，$a\geqq4$より，$a=15$

また，$a>b$ならば，$a-8$，$b-8$はともに49の約数で，$a-8>b-8\geqq-4$より，

$a-8=49$，$b-8=1$，よって，$a=57$，$b=9$

[解 説]

[1]　個々の確率は簡単に求まりますので，計算ミスをしないことが肝要です。

[2]　[1]の考え方を一部使うものの，大部分は整数問題です。上の解の式変形が初めてであれば，誘導に乗っていくことさえも難しいでしょう。

第 6 問

問題のページへ

$0 < x \leqq y$ より，$\dfrac{1}{y} \leqq \dfrac{1}{x}$，これから，$\dfrac{2}{a} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} \leqq \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x} = \dfrac{2}{x}$，$x \leqq a$

$y > 0$ より，$\dfrac{2}{a} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} > \dfrac{1}{x}$，$2x > a$，$x > \dfrac{a}{2}$, x は整数なので，$x \geqq \left[\dfrac{a}{2}+1\right]$

以上まとめて，$\left[\dfrac{a}{2}+1\right] \leqq x \leqq a$

(1) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{2}{a}$ より，$\dfrac{1}{y} = \dfrac{2}{a} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{2x-a}{ax}$，$y = \dfrac{ax}{2x-a}$ ……①

(2) $a = 7$ のとき，$\left[\dfrac{a}{2}+1\right] = 4$ より，$4 \leqq x \leqq 7$，このとき①より，$y = \dfrac{7x}{2x-7}$

x, y の値の変化を表にすると，

x	4	5	6	7
y	28	$\dfrac{35}{3}$	$\dfrac{42}{5}$	7

表示される y は，順に **y=28，y=7** となる。

対応する x は，それぞれ 4 と 7 である。

(3) $a = 12$ のとき，$\left[\dfrac{a}{2}+1\right] = 7$ より，$7 \leqq x \leqq 12$，このとき①より，

$y = \dfrac{12x}{2x-12} = \dfrac{6x}{x-6}$

x, y の値の変化を表にすると，

x	7	8	9	10	11	12
y	42	24	18	15	$\dfrac{66}{5}$	12

表示される y は，順に **y=42，y=24，y=18，y=15，y=12** となる。

[解 説]

(1) これはプログラムを読む問題ではなく，単なる式変形です。

(2) 整数問題が題材となっています。これは上の解のようにプログラムを読まなくても，次のような式変形をすれば空所はすべて埋まります。

$\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{2}{7}$，$2xy - 7x - 7y = 0$，$4xy - 14x - 14y = 0$，$(2x-7)(2y-7) = 49$

あとは前問の［2］と同様にして, 49 の約数を調べるわけです。

(3) この問題も(2)と同じく，次のような式変形をしてもよいでしょう。

$\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{6}$，$xy - 6x - 6y = 0$，$(x-6)(y-6) = 36$

つまり，コンピュータの問題として出題されながら，それとは無関係に整数問題として解くことができるわけです。