第1問（必答問題）

解答解説のページへ

［1］ 正の定数 a に対して，方程式

$$5\cdot 2^{-x}+2^{x+3}=2a \cdots\cdots\cdots ①$$

を考える。$t=2^x$ とおくと，方程式①は

$$t^2-\frac{a}{\boxed{\text{ア}}}t+\frac{\boxed{\text{イ}}}{8}=0 \cdots\cdots\cdots ②$$

となり，さらに

$$\left(t-\frac{a}{\boxed{\text{ウ}}}\right)^2+\frac{\boxed{\text{エオ}}-a^2}{\boxed{\text{カキ}}}=0$$

と変形される。したがって，$a>\boxed{\text{ク}}\sqrt{\boxed{\text{ケコ}}}$ のとき方程式②は 2 個の解をもつ。

また，$a=\boxed{\text{ク}}\sqrt{\boxed{\text{ケコ}}}$ のとき方程式①は，ただ一つの解

$$x=\frac{1}{\boxed{\text{サ}}}\left(\log_2\boxed{\text{シ}}-\boxed{\text{ス}}\right)$$

をもつ。

［2］ $0°\leqq\theta\leqq 90°$ の範囲で，関数

$$f(\theta)=\sqrt{6}\cos\theta+\sqrt{2}\sin\theta$$
$$g(\theta)=\sqrt{2}\cos\theta-\sqrt{6}\sin\theta$$

を考える。

(1) $f(60°)=\sqrt{\boxed{\text{セ}}}$ である。

(2) $\theta=\boxed{\text{ソタ}}°$ のとき，$f(\theta)$ は最小値 $\sqrt{\boxed{\text{チ}}}$ をとる。

(3) $g(\theta)=\boxed{\text{ツ}}\sqrt{\boxed{\text{テ}}}\cos(\theta+\boxed{\text{トナ}}°)$ と表せる。とくに，

$g(\theta)=-\dfrac{8\sqrt{2}}{5}$ ならば，

$$f(\theta)=\frac{\boxed{\text{ニ}}\sqrt{\boxed{\text{ヌ}}}}{\boxed{\text{ネ}}},\quad \sin\theta=\frac{\boxed{\text{ノ}}+\boxed{\text{ハ}}\sqrt{\boxed{\text{ヒ}}}}{10}$$

となる。

第 2 問（必答問題）

解答解説のページへ

$a>0$ とし，直線 $y=2ax$ を l とする。

(1)　点 $(-1,\ 0)$ で x 軸に接する放物線 C_1 が直線 l にも接しているとする。その接点 P の座標は($\boxed{\text{ア}}$, $\boxed{\text{イウ}}$)であり，C_1 の方程式は

$$y=\frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}(x+1)^2$$ である。

次に，x 軸に接する放物線 $C_2 : y=p(x-q)^2$ が点 P を通り，点 P での接線が直線 l と直交しているとする。このとき，点 P での C_2 の接線の傾きは $\dfrac{\boxed{\text{カキ}}}{\boxed{\text{クケ}}}$

であり，p と q は

$$p=\frac{1}{\boxed{\text{コサ}}\,a^{\boxed{\text{シ}}}},\quad q=\boxed{\text{ス}}+\boxed{\text{セ}}\,a^{\boxed{\text{ソ}}}$$

である。

(2)　放物線 C_1，x 軸，直線 $x=\boxed{\text{ア}}$ で囲まれる部分の面積を S_1 とし，また放物線 C_2，x 軸，直線 $x=\boxed{\text{ア}}$ で囲まれる部分の面積を S_2 とする。S_1，S_2 は a を用いてそれぞれ

$$S_1=\frac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}a,\quad S_2=\frac{\boxed{\text{ツテ}}}{\boxed{\text{ト}}}a^{\boxed{\text{ナ}}}$$

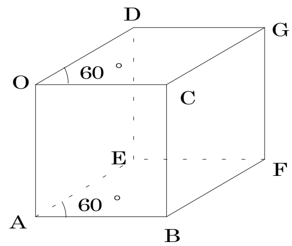
と表される。

したがって，$3S_1=S_2$ となるのは，$a=\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ニ}}}}{\boxed{\text{ヌ}}}$ のときである。

第 3 問（選択問題）

解答解説のページへ

次の図のように向かい合う面が平行である六面体 OABC-DEFG がある。ただし，面 OABC, CBFG は一辺の長さが 1 の正方形であり，面 OCGD は $\angle COD = 60°$ のひし形である。



このとき

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC} = \boxed{\text{ア}}$$

$$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD} = \frac{1}{\boxed{\text{イ}}}$$

である。

a を $0<a<1$ を満たす数とする。線分 EB を 2 : 1 に内分する点を P，線分 GE を $a:(1-a)$ に内分する点を Q とすると

$$\overrightarrow{PG} = -\overrightarrow{OA} + \frac{1}{\boxed{\text{ウ}}}\overrightarrow{OC} + \frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{ウ}}}\overrightarrow{OD}$$

$$\overrightarrow{PQ} = (a-1)\overrightarrow{OA} + \left(\frac{1}{\boxed{\text{オ}}} - \boxed{\text{カ}}\right)\overrightarrow{OC} + \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}\overrightarrow{OD}$$

である。

線分 PQ の長さは，$a = \dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$ のとき最小値 $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{サシ}}}}{\boxed{\text{ス}}}$ をとる。

第 4 問（選択問題）

解答解説のページへ

この問題では，複素数の偏角はすべて $0°$ 以上 $360°$ 未満とする。

$\alpha = 2\sqrt{2}(1+i)$ とし，等式

$$|z-\alpha| = 2$$

を満たす複素数 z を考える。

(1) z の中で絶対値が最大となるものは

$$\boxed{\text{ア}}\sqrt{\boxed{\text{イ}}}\left(\boxed{\text{ウ}}+i\right)$$

である。

(2) z の中で偏角が最大となるものを β とおくと，$\dfrac{\beta}{\alpha}$ の絶対値は $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{エ}}}}{\boxed{\text{オ}}}$ で，

偏角は $\boxed{\text{カキ}}$ ° である。また

$$\beta = \frac{\boxed{\text{ク}}\sqrt{\boxed{\text{ケ}}}-\sqrt{\boxed{\text{コ}}}}{\boxed{\text{サ}}}+\frac{\boxed{\text{シ}}\sqrt{\boxed{\text{ス}}}+\sqrt{\boxed{\text{セ}}}}{\boxed{\text{ソ}}}i$$

である。さらに，β の偏角は $\boxed{\text{タチ}}$ ° である。

$1 \leqq n \leqq 100$ の範囲で，β^n が実数になる整数 n は $\boxed{\text{ツ}}$ 個ある。

第 5 問（選択問題）

解答解説のページへ

［1］ 円いテーブルのまわりに 12 個の席がある。そこに二人が座るとき，その二人の間にある席の数のうち少ない方を X として確率変数 X を定める。ただし，二人の間にある席の数が同数の場合には，その数を X とする。このとき

$$P(X=0)=\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イウ}}},\quad P(X=1)=\frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オカ}}},\quad P(X=5)=\frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{クケ}}}$$

である。

期待値（平均）は $E(X)=\dfrac{\boxed{\text{コサ}}}{\boxed{\text{シス}}}$ であり，分散は $V(X)=\dfrac{\boxed{\text{セソタ}}}{\boxed{\text{チツテ}}}$ である。

［2］ $a,\ b$ を 4 以上の整数とし，a 個の席のある円いテーブルと b 個の席のある円いテーブルがある。そこに二人が座るとき，二人がそれぞれ確率 $\dfrac{1}{2}$ でどちらかのテーブルを選んで座るものとする。二人が同じテーブルでとなりあって座る確率を $p(a,\ b)$ とする。

いつ $p(a,\ b)=\dfrac{1}{14}$ となるかを調べてみよう。$p(a,\ b)=\dfrac{1}{14}$ を変形すると

$$(a-\boxed{\text{ト}})(b-\boxed{\text{ナ}})=\boxed{\text{ニヌ}}$$

となる。

したがって，$a=b$ ならば $a=\boxed{\text{ネノ}}$ のとき，$p(a,\ b)=\dfrac{1}{14}$ となる。

また，$a>b$ ならば $a=\boxed{\text{ハヒ}}$，$b=\boxed{\text{フ}}$ のとき，$p(a,\ b)=\dfrac{1}{14}$ となる。

第 6 問（選択問題）

解答解説のページへ

100 未満の正の整数 a に対して，正の整数 x, y で

$$\frac{2}{a}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y},\quad x \leqq y$$

を満たすもののうち y をすべて求めるプログラムを作った。ただし，**INT(X)**は **X** を越えない最大の整数を表す関数とする。

```
110  INPUT "a=";A
120  B=INT(A/2+1)
130  FOR X=B TO A
140      Y=[    ]
150      IF Y=INT(Y) THEN PRINT "y=";Y
160  NEXT X
170  END
```

このプログラムにおいて，行番号 **140** の行の $\boxed{}$ 内は次の①の右辺に対応した式を書くものとする。

(1)　y を x の式で表すと

$$y=\frac{\boxed{\text{ア}}\,x}{\boxed{\text{イ}}\,x-\boxed{\text{ウ}}}\ \cdots\cdots\cdots①$$

となる。

(2)　**a=?** に対して **7** を入力したとき **y=**$\boxed{\text{エオ}}$ および **y=**$\boxed{\text{カ}}$ がこの順に表示される。このとき，各 y に対応した x はそれぞれ $\boxed{\text{キ}}$ と $\boxed{\text{ク}}$ である。

(3)　**a=?** に対して **12** を入力したとき **y=**$\boxed{\text{ケコ}}$，**y=**$\boxed{\text{サシ}}$，**y=**$\boxed{\text{スセ}}$，**y=**$\boxed{\text{ソタ}}$，**y=**$\boxed{\text{チツ}}$ がこの順に表示される。