第1問　[1]

問題のページへ

(1)　$y=x^2+ax+a-4$……①より，

$$y=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}+a-4=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\frac{1}{4}(a-2)^2-3$$

頂点の y 座標は，$-\frac{1}{4}(a-2)^2-3=-\left(\frac{a-2}{2}\right)^2-3$

ここで，$x^2+ax+a-4=0$……②の 2 つの解は $x=\frac{-a\pm\sqrt{a^2-4(a-4)}}{2}$

$\alpha=\frac{-a-\sqrt{a^2-4a+16}}{2}$，$\beta=\frac{-a+\sqrt{a^2-4a+16}}{2}$ とすると，

$$(\alpha-\beta)^2=\left(-\sqrt{a^2-4a+16}\right)^2=a^2-4a+16$$

条件より，$a^2-4a+16<28$，よって，$-2<a<6$

(2)　①より，$a(x+1)+x^2-4-y=0$

a の値にかかわらず成立する条件は，$x+1=0$，$x^2-4-y=0$

これより，$x=-1$，$y=-3$，よって，放物線①は点$(-1,\ -3)$を通過する。

また，①の頂点を$(x,\ y)$とすると，

$x=-\frac{a}{2}$……④，$y=-\frac{a^2}{4}+a-4$……⑤

④から $a=-2x$，⑤に代入して $y=-x^2-2x-4$……③

(3)　③より，$y=-(x+1)^2-3$

条件より, (1)の結果と合わせて，$-\left(\frac{a-2}{2}\right)^2-3=-3$，よって，$a=2$

[解 説]

(1)　$(\alpha-\beta)^2$ を求めるには，上の解のように，解の公式で行うのが簡明ですが，数学 B の「解と係数の関係」を利用してもできます。昨年もこれと同じタイプの問題が出題されています。

(2)　この設問は数学Ⅱの「図形と式」の分野に属するもので，数学Ⅰの範囲から逸脱しています。規制緩和なのでしょうか。

(3)　(2)ができれば簡単です。

第1問　[2]

問題のページへ

1回目の得点を x, 2回目の得点を y とする。

(1)　6点となるのは, $(x,\ y)=(0,\ 6),\ (6,\ 0),\ (3,\ 3)$

その確率は, $\dfrac{3}{6}\times\dfrac{2}{6}\times 2+\dfrac{1}{6}\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{13}{36}$

(2)　Aの合計得点は0点, 3点, 6点, 9点, 12点の場合がある。

(i)　Aの合計得点が0点のとき, $(0,\ 0)$ より $\dfrac{3}{6}\times\dfrac{3}{6}=\dfrac{9}{36}$

(ii)　Aの合計得点が3点のとき, $(0,\ 3),\ (3,\ 0)$ より $\dfrac{3}{6}\times\dfrac{1}{6}\times 2=\dfrac{6}{36}$

(iii) Aの合計得点が6点のとき, (1)より $\dfrac{13}{36}$

(iv) Aの合計得点が9点のとき, $(3,\ 6),\ (6,\ 3)$ より $\dfrac{1}{6}\times\dfrac{2}{6}\times 2=\dfrac{4}{36}$

(v)　Aの合計得点が12点のとき, $(6,\ 6)$ より $\dfrac{2}{6}\times\dfrac{2}{6}=\dfrac{4}{36}$

以上より, 期待値は, $0\times\dfrac{9}{36}+3\times\dfrac{6}{36}+6\times\dfrac{13}{36}+9\times\dfrac{4}{36}+12\times\dfrac{4}{36}=5$

(3)　(1)と同様にして, Bの合計得点が6点となる確率は, $\dfrac{2}{6}\times\dfrac{1}{6}\times 2+\dfrac{3}{6}\times\dfrac{3}{6}=\dfrac{13}{36}$

A, Bともに6点となる確率は, $\dfrac{13}{36}\times\dfrac{13}{36}=\dfrac{169}{1296}$

(4)　Bの合計得点は, (2)と同様にして,

(i)　Bの合計得点が0点のとき, $\dfrac{2}{6}\times\dfrac{2}{6}=\dfrac{4}{36}$

(ii)　Bの合計得点が3点のとき, $\dfrac{2}{6}\times\dfrac{3}{6}\times 2=\dfrac{12}{36}$

(iii) Bの合計得点が6点のとき, (3)より $\dfrac{13}{36}$

(iv) Bの合計得点が9点のとき, $\dfrac{3}{6}\times\dfrac{1}{6}\times 2=\dfrac{6}{36}$

(v)　Bの合計得点が12点のとき, $\dfrac{1}{6}\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{36}$

(2)と合わせて, $\dfrac{9}{36}\times\dfrac{4}{36}+\dfrac{6}{36}\times\dfrac{12}{36}+\dfrac{13}{36}\times\dfrac{13}{36}+\dfrac{4}{36}\times\dfrac{6}{36}+\dfrac{4}{36}\times\dfrac{1}{36}=\dfrac{305}{1296}$

[解 説]

(1)　これは場合分けだけです。

(2)　期待値の計算は, このようにどうしても計算量が多くなります。

(3)　(1)でミスをしなければ, できるでしょう。

(4)　内容的には簡単なので, 正確な計算力が第一という問題です。

第2問 [1]

問題のページへ

(1) A を x^2-5x-2 で割って,

$$A=(x^2-5x-2)(x^2-3x+1)+7x+1$$

商は x^2-3x+1, 余りは $7x+1$

	1	−8	14	8	−1
2			2	−6	2
5		5	−15	5	
	1	−3	1	7	1

(2) $x^2-4x=(2+\sqrt{3})^2-4(2+\sqrt{3})=-1$

よって, $x^2-4x+1=0$ の解の1つが

$x=2+\sqrt{3}$ より, A を x^2-4x+1 で割って,

$$A=(x^2-4x+1)(x^2-4x-3)+2$$

	1	−8	14	8	−1
−1			−1	4	3
4		4	−16	−12	
	1	−4	−3	0	2

上式の両辺に $x=2+\sqrt{3}$ を代入すると, $x^2-4x+1=0$ から,

このときの A の値は, $A=2$

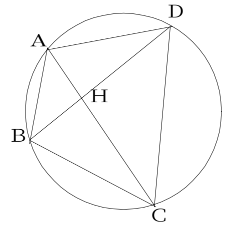
[解 説]

(1) 整式の割り算の計算です。上の解では組立除法を用いましたが, 普通にやってももちろん結構です。

(2) (1)の計算結果が利用できない問題です。初めにこの問題を解いたとき, $x^2-4x+1=0$ が出た段階で(1)が使えないので計算ミスをしたのではないかと疑い, もう一度計算し直したぐらいです。これまでのセンター特有の誘導形式では考えにくいことで, 「新傾向」と言うべきかもしれません。なお, 内容的には, 数学 A の「整式の除法」の問題というよりは, 数学 B の「剰余定理の応用」という問題です。ここでも規制緩和です。

第2問　[2]

問題のページへ



$\angle ABC > 90°$ より，$\cos\angle ABC < 0$

$$\cos\angle ABC = -\sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{-\sqrt{6}}{3}$$

このとき，△ABC に余弦定理を適用して，

$$AC^2 = 2^2 + (\sqrt{6})^2 - 2\cdot 2\cdot\sqrt{6}\cdot\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right) = 18$$

$$AC = 3\sqrt{2}$$

また，円の半径を R として，△ABC に正弦定理を適用して，

$$\frac{3\sqrt{2}}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = 2R,\quad R = \frac{3}{2}\sqrt{6}$$

ここで，$\angle CAB = \theta$，$\angle ACB = \varphi$ とおき，△ABC に正弦定理を適用して，

$$\frac{\sqrt{6}}{\sin\theta} = \frac{2}{\sin\varphi} = 2\cdot\frac{3}{2}\sqrt{6}$$，これより，$\sin\theta = \frac{1}{3}$，$\sin\varphi = \frac{\sqrt{6}}{9}$

さて，$\angle DAH = 90° - \angle ADB = 90° - \varphi$ から，

$$BH : HD = \tan\theta : \tan(90° - \varphi) = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} : \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} = \sin\theta\sin\varphi : \cos\theta\cos\varphi$$

$0° < \theta < 90°$，$0° < \varphi < 90°$ より，

$$\cos\theta = \sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2}{3}\sqrt{2},\quad \cos\varphi = \sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{6}}{9}\right)^2} = \frac{5}{9}\sqrt{3}$$

$$BH : HD = \left(\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{6}}{9}\right) : \left(\frac{2}{3}\sqrt{2}\times\frac{5}{9}\sqrt{3}\right) = 1 : 10$$，よって $DH = 10BH$

[解 説]

よくある構図の問題です。最後の DH と BH の長さの比を求める設問以外は基本的です。しかしこの最後の設問は難問です。実際，上の解でも，この部分だけで解のほぼ半分の分量になっていることからもわかります。これ以外の別解があるかもしれませんが，この設問の直前の設問の結論を用いて解くとこのようになります。なお，配点が難しい割にはたったの 5 点でしたので，あまり差はつかなかったのではないかと思えます。それに答が 10 ですので，山勘で当たったという人もいましたし。

第3問

問題のページへ

(1) 中央の項を a とすると，連続する5項は，

$a-4$，$a-2$，a，$a+2$，$a+4$

条件より，$(a-4)+(a-2)+a=(a+2)+(a+4)$

よって，$a=12$

(2) 中央の項を a とすると，連続する $2n+1$ 項は，

$a-2n,\cdots\cdots,a-2$，a，$a+2,\cdots\cdots,a+2n$

条件より，$(a-2n)+\cdots\cdots+(a-2)+a=(a+2)+\cdots\cdots+(a+2n)$

よって，$a=2(2+4+\cdots\cdots+2n)=2\cdot\dfrac{2+2n}{2}\cdot n=2n^2+2n$

(3) (1)と同様にして，条件より，

$(a-4)^2+(a-2)^2+a^2=(a+2)^2+(a+4)^2$

$-8a-4a+a^2=4a+8a$，$a^2=2(4a+8a)$

$a>0$ より，$a=24$

(4) (2)と同様にして，条件より，

$(a-2n)^2+\cdots\cdots+(a-2)^2+a^2=(a+2)^2+\cdots\cdots+(a+2n)^2$

$(-4na)+\cdots\cdots+(-4a)+a^2=4a+\cdots\cdots+4na$，$a^2=2(4a+\cdots\cdots+4na)$

$a>0$ より，$a=2(4+\cdots\cdots+4n)=4n^2+4n$

[解 説]

(1) この問題はどんな解き方をしても，簡単に解けます。

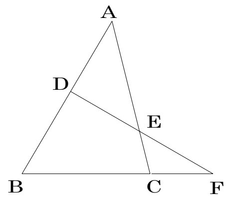
(2) (1)の議論を一般化したのが本問です。具体的なものから帰納的に推測していき，一般的な規則性を発見していくというタイプの問題で，現行の高校数学の指導要領で特に強調されている点を具現化したものです。このような新しい誘導形式が本年度だけで終わるとはとうてい考えられません。一番注目すべき問題です。

(3) (1)と同様な設問で, (4)への誘導問題です。

(4) (3)の議論を一般化したものです。なお，(2)と(4)の結論で $n=2$ とすると，それぞれ(1)と(3)の結論になります。この点を確認するくらいの心の余裕は必要です。

第 4 問

問題のページへ



条件より，$\mathrm{AD}=2a$，$\mathrm{AE}=3a$ とおく。

(1)　$\mathrm{AD}:\mathrm{BD}=2:3$ より，$\mathrm{BD}=3a$

$\mathrm{AE}:\mathrm{CE}=3:1$ より，$\mathrm{CE}=a$

$$S=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\mathrm{AB}\right)\left(\frac{3}{4}\mathrm{AC}\right)\sin A=\frac{3}{10}\triangle\mathrm{ABC}=\frac{3}{10}(S+T)$$

これより，$7S=3T$ となり，$\dfrac{S}{T}=\dfrac{3}{7}$

(2)　$\mathrm{BD}:\mathrm{CE}=3:1$ より，$\mathrm{BD}=3b$，$\mathrm{CE}=b$ とおく。

ここで，$\triangle\mathrm{ABC}$ と直線 DE について，メネラウスの定理より，

$$\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}}\cdot\frac{\mathrm{BF}}{\mathrm{FC}}\cdot\frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}}=1\text{，よって，}\frac{2a}{3b}\cdot\frac{\mathrm{BF}}{\mathrm{FC}}\cdot\frac{b}{3a}=1,\quad\frac{\mathrm{BF}}{\mathrm{CF}}=\frac{9}{2}$$

さらに, 4 点 B, C, E, D を通る円と，線分 AB, AC について，方べきの定理より，

$$\mathrm{AD}\cdot\mathrm{AB}=\mathrm{AE}\cdot\mathrm{AC}\text{，よって，}2a(2a+3b)=3a(3a+b),\quad 5a=3b$$

したがって，$\dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}}=\dfrac{2a+3b}{3a+b}=\dfrac{2a+3\cdot\dfrac{5}{3}a}{3a+\dfrac{5}{3}a}=\dfrac{3}{2}$，$\dfrac{\mathrm{AD}}{\mathrm{BD}}=\dfrac{2a}{3b}=\dfrac{2a}{5a}=\dfrac{2}{5}$

また，$\triangle\mathrm{BFD}$ と直線 AC について，メネラウスの定理より，

$$\frac{\mathrm{FC}}{\mathrm{CB}}\cdot\frac{\mathrm{BA}}{\mathrm{AD}}\cdot\frac{\mathrm{DE}}{\mathrm{EF}}=1\text{，よって，}\frac{2}{7}\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{\mathrm{DE}}{\mathrm{EF}}=1,\quad\frac{\mathrm{DE}}{\mathrm{EF}}=1\text{，}$$

すなわち，$\dfrac{\mathrm{EF}}{\mathrm{DF}}=\dfrac{1}{2}$

[解 説]

(1)　二辺夾角のタイプの三角形の面積比を問うもので，頻出題です。

(2)　メネラウスの定理と方べきの定理を利用する問題です。誘導に乗っていけば, そのまま最後まで行き着くという往年のセンター試験の誘導見本のようなものです。

第 5 問

問題のページへ

(1)　40 行 : A は値が 1 つずつ増えていくので, **A=A+1**

50 行 : B は値が 2 倍ずつになっていくので, **B=B＊2**

60 行 : B が N より小であれば, 次に A の値を 1 つ増やし, B の値を 2 倍するので, **B<N** であれば, **40** 行にうつる。

(2)　N に 5 を入れたとき, 40 行の実行回数と A, B の値を表にすると,

	初め	1 回	2 回	3 回
A	0	1	2	3
B	1	2	4	8

40 行は 3 回実行され, A として 3, B として 8 が表示される。

(3)　N が 1998 のとき, N 以上の最小の 2 の累乗は, $2^{10}=1024$, $2^{11}=2048$ より, 2^{11} となる。そのため, A として 11, B として 2048 が表示される。

[解 説]

(1)　簡単に空所補充のできる問題です。

(2)　実行回数の問題は, あわてて数えると, ±1 回の間違いをよくおかしてしまいます。上の解のように表でも作って慎重に数えましょう。

(3)　この問いはプログラムとは無関係で, 何か裏でもあるのではないかと勘ぐってしまいます。じつは昨年も最後の設問がこのタイプで, 同じ心境になっていたのを思い出したぐらいです。