第１問

問題のページへ

[1] (1) 不等式$|2x+1|\leqq 3$に対して，$-3\leqq 2x+1\leqq 3$より，$-2\leqq x\leqq 1$

(2) aを自然数とするとき，不等式$|2x+1|\leqq a$ ……①の解は, (1)と同様にして,

$$-a\leqq 2x+1\leqq a\,,\ \ \frac{-1-a}{2}\leqq x\leqq\frac{-1+a}{2}$$

(3) $a=3$のとき, (1)より，①の整数解の個数Nは，$N=4$となる。

$a=4$のとき，①の解は$-\frac{5}{2}\leqq x\leqq\frac{3}{2}$となり，$N=4$である。

$a=5$のとき，①の解は$-3\leqq x\leqq 2$となり，$N=6$である。

よって, Nが初めて4より大きくなるのは，$a=5$のときである。

[2] (1) 条件$p: m>k$または$n>k$の否定は，$\overline{p}: m\leqq k$かつ$n\leqq k$

(2) (i) $k=1$のとき，$p: m>1$または$n>1$，$q: mn>1$となり,

$\overline{p}: m\leqq 1$かつ$n\leqq 1$，$\overline{q}: mn\leqq 1$

すると，$\overline{q}\Rightarrow\overline{p}$は真より$p\Rightarrow q$は真，$\overline{p}\Rightarrow\overline{q}$は真より$q\Rightarrow p$は真。

よって, pはqであるための必要十分条件である。

(ii) $k=2$のとき，$p: m>2$または$n>2$，$q: mn>4$，$r: mn>2$となり,

$\overline{p}: m\leqq 2$かつ$n\leqq 2$，$\overline{q}: mn\leqq 4$，$\overline{r}: mn\leqq 2$

まず，$\overline{r}\Rightarrow\overline{p}$は真より$p\Rightarrow r$は真，$\overline{p}\Rightarrow\overline{r}$は偽より$r\Rightarrow p$は偽。

よって, pはrであるための十分条件であるが，必要条件でない。

また，$\overline{q}\Rightarrow\overline{p}$は偽より$p\Rightarrow q$は偽，$\overline{p}\Rightarrow\overline{q}$は真より$q\Rightarrow p$は真。

よって, pはqであるための必要条件であるが，十分条件でない。

[解 説]

[1]は基本の確認だけですが, [2]は対偶を考えると明快なおもしろい問題です。

第２問

問題のページへ

2 次関数 $y=-x^2+(2a+4)x+b$ ……①のグラフ G に対して,

$$y=-\{x-(a+2)\}^2+(a+2)^2+b=-\{x-(a+2)\}^2+a^2+4a+b+4$$

これより, 頂点の座標は, $(a+2,\ a^2+4a+b+4)$ である。

この頂点が, 直線 $y=-4x-1$ 上にあるとき,

$$a^2+4a+b+4=-4(a+2)-1\ ,\ b=-a^2-8a-13$$

よって, ①は, $y=-x^2+(2a+4)x-a^2-8a-13=-\{x-(a+2)\}^2-4a-9$

(1) グラフ G が x 軸と異なる 2 点で交わる条件は, $-4a-9>0$ から, $a<-\dfrac{9}{4}$

また, G が x 軸の正の部分と負の部分の両方で交わる条件は, $x=0$ のとき,

$$y=-a^2-8a-13>0\ ,\ a^2+8a+13<0\ ,\ -4-\sqrt{3}<a<-4+\sqrt{3}$$

(2) 関数①の $0\leqq x\leqq 4$ における最小値が -22 となるのは,

(i) $a+2\geqq 2$ $(a\geqq 0)$ のとき

$x=0$ において最小値をとるので, $-a^2-8a-13=-22$ から,

$$a^2+8a-9=0\ ,\ (a+9)(a-1)=0$$

すると, $a\geqq 0$ より, $a=1$

(ii) $a+2<2$ $(a<0)$ のとき

$x=4$ において最小値をとるので, $-16+8a+16-a^2-8a-13=-22$ から,

$$a^2-9=0,\ (a+3)(a-3)=0$$

すると, $a<0$ より, $a=-3$

さて, $a=1$, $a=-3$ のとき, ①はそれぞれ

$$y=-(x-3)^2-13\ \cdots\cdots\cdots②,\quad y=-(x+1)^2+3\ \cdots\cdots\cdots③$$

これより, $0\leqq x\leqq 4$ における関数②の最大値は -13 である。

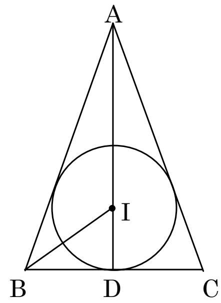
また, ②のグラフの頂点の座標は $(3,\ -13)$, ③のグラフの頂点の座標は $(-1,\ 3)$ であることより, ③のグラフを x 軸方向に 4, y 軸方向に -16 だけ平行移動すると, ②のグラフと一致する。

[解 説]

2 次関数について, 基本の確認問題です。例年のように出題される設問だけで構成されています。

第３問

問題のページへ



$AB=AC=3$，$BC=2$である△ABCにおいて，辺BCの中点をDとすると，線分ADは辺BCと垂直になる。

$AD=\sqrt{3^2-1^2}=2\sqrt{2}$から，

$$\cos\angle ABC=\frac{BD}{AB}=\frac{1}{3},\ \sin\angle ABC=\frac{AD}{AB}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\sqrt{2}=2\sqrt{2}\ \cdots\cdots\cdots①$$

また，△ABCの内接円Iの半径をrとおくと，①より，

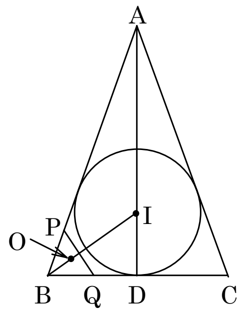
$$\triangle ABC=\frac{1}{2}(3+3+2)r=2\sqrt{2},\ 4r=2\sqrt{2},\ r=\frac{\sqrt{2}}{2}\ \cdots\cdots\cdots②$$

さらに，$BI=\sqrt{1^2+r^2}=\sqrt{1+\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$

(1) 辺AB上に点P，辺BC上に点Qを，$BP=BQ$かつ$PQ=\frac{2}{3}$となるようにとり，

△PBQの外接円Oの直径を$2R$とおくと，正弦定理より，

$$2R=\frac{PQ}{\sin\angle ABC}=\frac{\frac{2}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\ \cdots\cdots\cdots③$$



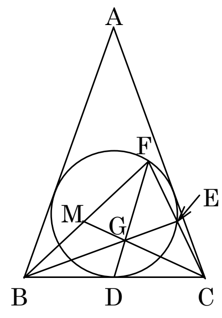
さて，$BP=BQ$から，線分BOは∠ABCの二等分線であり，また点Iは△ABCの内心なので，線分BIも∠ABCの二等分線である。これより，3点B，O，Iは一直線上にある。さらに，点Bは円Iの外部にあり，②③から，

$$2R+r=\sqrt{2}>\frac{\sqrt{6}}{2}=BI$$

よって，円Iと円Oは，異なる2点で交わる。

(2) 円I上の点E，Fは，3点C，E，Fが一直線上に並んでおり，方べきの定理から，$CE\cdot CF=CD^2$となり，

$$CE=\frac{CD^2}{CF}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{EF}{CE}=\frac{CF-CE}{CE}=1$$



これより，点Eは線分CFの中点であり，また点Dは線分辺BCの中点である。

すると，線分BEとDFとの交点Gは△BCFの重心となり，線分CGの延長と線分BFとの交点をMとすると，$\frac{GM}{CG}=\frac{1}{2}$である。

[解 説]

量の多い問題です。(1)と(2)は無関係で，単に同じ題材を使ったにすぎません。

第４問

問題のページへ

9 枚のカードから 5 枚のカードを同時に取り出すとき，カードの取り出し方は，$_9\mathrm{C}_5 = {}_9\mathrm{C}_4 = 126$ 通りある。

(1) 取り出したカードの中に 5 と書かれたカードがある取り出し方は $_8\mathrm{C}_4 = 70$ 通り，5 と書かれたカードがない取り出し方は $_8\mathrm{C}_5 = {}_8\mathrm{C}_3 = 56$ 通りである。

(2) 得点が 0 点となるのは, 5 と書かれたカードを取り出さない場合より，その確率は，(1)より，$\dfrac{_8\mathrm{C}_5}{_9\mathrm{C}_5} = \dfrac{56}{126} = \dfrac{4}{9}$ である。

得点が 1 点となるのは, 5 のカードと 4 枚の 6 以上のカードを取り出す場合より，その確率は，$\dfrac{_4\mathrm{C}_4}{_9\mathrm{C}_5} = \dfrac{1}{126}$ である。

得点が 2 点となるのは，5 のカード，1 枚の 4 以下のカード，および 3 枚の 6 以上のカードを取り出す場合より，その確率は，$\dfrac{_4\mathrm{C}_1 \times {}_4\mathrm{C}_3}{_9\mathrm{C}_5} = \dfrac{16}{126} = \dfrac{8}{63}$ である。

得点が 3 点となるのは，5 のカード，2 枚の 4 以下のカード，および 2 枚の 6 以上のカードを取り出す場合より，その確率は，$\dfrac{_4\mathrm{C}_2 \times {}_4\mathrm{C}_2}{_9\mathrm{C}_5} = \dfrac{36}{126} = \dfrac{2}{7}$ である。

得点が 4 点となるのは，得点が 2 点となる場合と同様で，その確率は $\dfrac{16}{126}$，また得点が 5 点となるのは，得点が 1 点となる場合と同様で，その確率は $\dfrac{1}{126}$ である。

以上より，得点の期待値は

$$\frac{1}{126}(0\times 56 + 1\times 1 + 2\times 16 + 3\times 36 + 4\times 16 + 5\times 1) = \frac{210}{126} = \frac{5}{3}$$

[解 説]

(2)のポイントは，カードを選べば，その並べ方は 1 通りということです。また，期待値の計算も面倒ではありません。