

第1問

問題のページへ

[1] $y = \cos 2\theta + \sqrt{3} \sin 2\theta - 2\sqrt{3} \cos \theta - 2 \sin \theta$ に対し, $t = \sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta$ とおくと,
 $t^2 = \sin^2 \theta + 2\sqrt{3} \sin \theta \cos \theta + 3 \cos^2 \theta = 2 \cos^2 \theta + 2\sqrt{3} \sin \theta \cos \theta + 1$

さらに, $t^2 = \cos 2\theta + 1 + \sqrt{3} \sin 2\theta + 1$ より, $\cos 2\theta + \sqrt{3} \sin 2\theta = t^2 - 2$ となり,
 $y = t^2 - 2 - 2t = t^2 - 2t - 2$

また, $t = 2 \sin \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right)$ であり, $-\frac{\pi}{2} < \theta < 0$ から, $-\frac{\pi}{6} < \theta + \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{3}$ となるので,
 $2 \times \left(-\frac{1}{2} \right) < t < 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$, $-1 < t < \sqrt{3}$

したがって, $y = (t-1)^2 - 3$ と変形すると, $t=1$ のとき, 最小値 -3 をとる。このとき, $2 \sin \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) = 1$ より, $\theta + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$ すなわち $\theta = -\frac{\pi}{6}$ となる。

[2] $12(\log_2 \sqrt{x})^2 - 7 \log_4 x - 10 > 0$ に対して, $X = \log_2 x$ とおくと,

$$\log_2 \sqrt{x} = \frac{1}{2} \log_2 x = \frac{1}{2} X, \quad \log_4 x = \frac{\log_2 x}{\log_2 4} = \frac{1}{2} X$$

よって, は, $12 \left(\frac{1}{2} X \right)^2 - 7 \cdot \frac{1}{2} X - 10 > 0$, $6X^2 - 7X - 20 > 0$ となり,
 $(3X+4)(2X-5) > 0$

よって, $X < -\frac{4}{3}$, $\frac{5}{2} < X$ となり, の解は, $x < 2^{-\frac{4}{3}}$, $2^{\frac{5}{2}} < x$ である。

ここで, $2^{-\frac{4}{3}} < 2^0 = 1$, また $2^{\frac{5}{2}} = 4\sqrt{2}$ で, $5 < 4\sqrt{2} < 6$ であるので, を満たす最小の自然数 x は 6 である。

次に, $x + \log_3 x < 14$ に対して,

$$\log_3 x < 14 - x$$

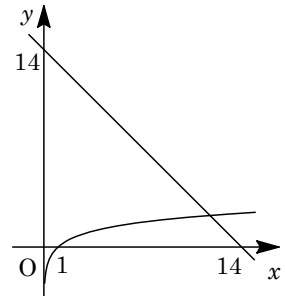
ここで, $y = \log_3 x$ と $y = 14 - x$ のグラフをかくと, 右図のようになり,

$$\log_3 11 < 14 - 11 = \log_3 27$$

$$\log_3 12 > 14 - 12 = \log_3 9$$

よって, を満たす最大の自然数 x は 11 である。

したがって, と をともに満たす自然数 x は, 6 以上 11 以下である。



[解 説]

[2]の最後の設問以外は, よく見かける問題です。最後の設問も, 空欄の文字数から 2 桁であることがわかり, 10 以上の整数を順次, 代入していけばよいことになります。

第2問

問題のページへ

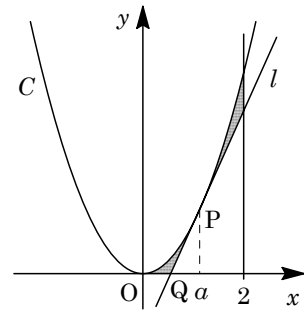
$C: y = x^2$ に対して、 $y' = 2x$ となり、 $P(a, a^2)$ における接線 l の方程式は、

$$y - a^2 = 2a(x - a), \quad y = 2ax - a^2$$

$a \neq 0$ のとき、直線 l が x 軸と交わる点 Q は、

$$0 = 2ax - a^2, \quad x = \frac{a}{2}$$

よって、 $Q(\frac{a}{2}, 0)$ である。



$a > 0$ のとき、曲線 C と直線 l および x 軸で囲まれた図形の面積 S は、

$$S = \int_0^a x^2 dx - \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot a^2 = \frac{a^3}{3} - \frac{a^3}{4} = \frac{a^3}{12}$$

$a < 2$ のとき、曲線 C と直線 l および直線 $x = 2$ で囲まれた図形の面積 T は、

$$\begin{aligned} T &= \int_a^2 (x^2 - 2ax + a^2) dx = \int_a^2 (x - a)^2 dx = \frac{1}{3} [(x - a)^3]_a^2 \\ &= \frac{1}{3} (2 - a)^3 = -\frac{a^3}{3} + 2a^2 - 4a + \frac{8}{3} \end{aligned}$$

$0 < a < 2$ のとき、 $U = S + T = -\frac{a^3}{4} + 2a^2 - 4a + \frac{8}{3}$ に対して、

$$\begin{aligned} U' &= -\frac{3}{4}a^2 + 4a - 4 \\ &= -\frac{1}{4}(3a - 4)(a - 4) \end{aligned}$$

a	0	...	$\frac{4}{3}$...	2
U'		-	0	+	
U	$\frac{8}{3}$	\searrow	$\frac{8}{27}$	\nearrow	$\frac{2}{3}$

右表より、 U は $a = 0$ で最大値 $\frac{8}{3}$ をとり、 $a = \frac{4}{3}$

で最小値 $\frac{8}{27}$ をとる。

[解 説]

例年に比べて基本的な設問になっています。ただ、最大値や最小値を求める数値計算には、 U の展開式を用いるよりは、 $\frac{a^3}{12} + \frac{1}{3}(2 - a)^3$ を利用した方が適切です。

第3問

問題のページへ

点 P_n の座標を x_n とするとき、点 $P_1(1)$ 、 $P_2(2)$ に対し、線分 P_1P_2 を $3:1$ に内分する点 P_3 の座標は、 $x_3 = \frac{x_1 + 3x_2}{4} = \frac{7}{4}$ である。

同様に、線分 P_nP_{n+1} を $3:1$ に内分する点を P_{n+2} とするので、

$$x_{n+2} = \frac{x_n + 3x_{n+1}}{4} = \frac{3}{4}x_{n+1} + \frac{1}{4}x_n \dots\dots\dots$$

ここで、 $y_n = x_{n+1} - x_n$ とすると、 $y_1 = x_2 - x_1 = 1$ であり、より、

$$y_{n+1} = x_{n+2} - x_{n+1} = \frac{3}{4}x_{n+1} + \frac{1}{4}x_n - x_{n+1} = -\frac{1}{4}(x_{n+1} - x_n) = -\frac{1}{4}y_n$$

よって、 $y_n = y_1 \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1} = \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$ となり、 $n \geq 2$ に対して、

$$x_n = x_1 + \sum_{k=1}^{n-1} y_k = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(-\frac{1}{4}\right)^{k-1} = 1 + \frac{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{9}{5} - \frac{4}{5} \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

なお、この式は $n=1$ のときも成り立つ。

次に、 $r = \left|-\frac{1}{4}\right| = \frac{1}{4}$ とおくとき、 $S_n = \sum_{k=1}^n k|y_k| = \sum_{k=1}^n kr^{k-1}$ に対して、

$$\begin{aligned} S_n - rS_n &= \sum_{k=1}^n kr^{k-1} - \sum_{k=1}^n kr^k = \sum_{k=1}^n kr^{k-1} - \sum_{l=2}^{n+1} (l-1)r^{l-1} \quad (l=k+1) \\ &= \sum_{k=1}^n kr^{k-1} - \sum_{l=1}^{n+1} (l-1)r^{l-1} = \sum_{k=1}^n kr^{k-1} - \sum_{k=1}^{n+1} (k-1)r^{k-1} \\ &= \sum_{k=1}^n kr^{k-1} - \sum_{k=1}^n (k-1)r^{k-1} - nr^n = \sum_{k=1}^n r^{k-1} - nr^n = \frac{1-r^n}{1-r} - nr^n \end{aligned}$$

よって、 $r = \frac{1}{4}$ で、 $S_n = \frac{1-r^n}{(1-r)^2} - \frac{nr^n}{1-r}$ から、

$$S_n = \left(\frac{4}{3}\right)^2 \left\{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right\} - \frac{4}{3}n \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{16}{9} \left\{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right\} - \frac{n}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

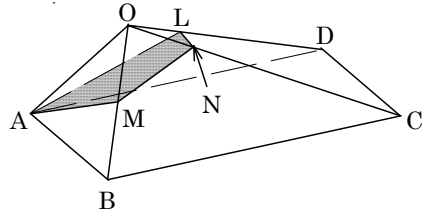
[解 説]

漸化式の応用についての有名な構図の問題です。後半の(等差)×(等比)のタイプの数列の和は、変数を置き換えてシグマ計算で押し通しましたが、ここは普通に、各項を並べて書いて、差をとった方がすばやいでしょう。

第4問

問題のページへ

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}, \overrightarrow{OC} = \vec{c} \text{ とおくと,} \\ \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{BA} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c} \\ \text{辺 OD を } 1:2 \text{ に内分する点を L とすると,} \\ \overrightarrow{AL} = \overrightarrow{OL} - \overrightarrow{OA} = \frac{1}{3}(\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}) - \vec{a} \\ = -\frac{2}{3}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c} \end{aligned}$$



ここで、辺 OB の中点を M、3 点 A, L, M の定める平面を α とし、平面 α と辺 OC との交点を N とする。

点 N は平面 α 上にあることから、 $\overrightarrow{AN} = s\overrightarrow{AL} + t\overrightarrow{AM}$ と表せ、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{AL} + t\overrightarrow{AM} = \vec{a} + s\left(-\frac{2}{3}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}\right) + t\left(-\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\right) \\ = \left(1 - \frac{2}{3}s - t\right)\vec{a} + \left(-\frac{s}{3} + \frac{t}{2}\right)\vec{b} + \frac{s}{3}\vec{c} \end{aligned}$$

また、点 N は辺 OC 上にもあり、 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ は 1 次独立なので、

$$1 - \frac{2}{3}s - t = 0 \dots\dots\dots, \quad -\frac{s}{3} + \frac{t}{2} = 0 \dots\dots\dots$$

より、 $t = \frac{1}{2}, s = \frac{3}{4}$ となり、 $\overrightarrow{ON} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4}\vec{c} = \frac{1}{4}\vec{c}$

さて、条件より、 $OA = OB = 1, AD = BC = 2, OD = OC = \sqrt{3}, AB = DC = 2r$ ます、 $|\overrightarrow{AB}| = 2r$ より、 $|\vec{b} - \vec{a}| = 4r^2$ となり、 $1 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 1 = 4r^2$ から、

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 - 2r^2$$

また、 $OB^2 + OC^2 = BC^2$ から $\angle BOC = 90^\circ$ となり、 $\vec{b} \cdot \vec{c} = 0$

さらに、 $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{4r^2 + 4}$ より、 $|\vec{c} - \vec{a}| = 4r^2 + 4$ となり、 $3 - 2\vec{a} \cdot \vec{c} + 1 = 4r^2 + 4$

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = -2r^2$$

そこで、 $\overrightarrow{AM} = -\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}, \overrightarrow{MN} = -\frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{c}$ から、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{MN} &= \left(-\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{c}\right) = \frac{1}{2}\vec{a} \cdot \vec{b} - \frac{1}{4}\vec{a} \cdot \vec{c} - \frac{1}{4}|\vec{b}|^2 + \frac{1}{8}\vec{b} \cdot \vec{c} \\ &= \frac{1}{2}(1 - 2r^2) - \frac{1}{4}(-2r^2) - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}(1 - 2r^2) \end{aligned}$$

直線 AM と直線 MN が垂直となるのは、 $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{MN} = 0$ から、 $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$ のときであり、

$$AB = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

[解 説]

センター試験ではよくあることですが、最後の空欄を埋める計算に時間がかかりません。しかし、それ以外は、基本的な設問が並んでいます。