第１問

解答解説のページへ

[1] $-\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq 0$ のとき，関数

$$y = \cos 2\theta + \sqrt{3}\sin 2\theta - 2\sqrt{3}\cos\theta - 2\sin\theta$$

の最小値を求めよう。

$t = \sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta$ とおくと

$$t^2 = \boxed{\text{ア}}\cos^2\theta + \boxed{\text{イ}}\sqrt{\boxed{\text{ウ}}}\sin\theta\cos\theta + \boxed{\text{エ}}$$

であるから，$y = t^2 - \boxed{\text{オ}}\,t - \boxed{\text{カ}}$ となる。

また，$t = \boxed{\text{キ}}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{\boxed{\text{ク}}}\right)$ である。

$\theta + \frac{\pi}{\boxed{\text{ク}}}$ のとり得る値の範囲は，$-\frac{\pi}{\boxed{\text{ケ}}} \leqq \theta + \frac{\pi}{\boxed{\text{ク}}} \leqq \frac{\pi}{\boxed{\text{ク}}}$ であるから，t のとり得る値の範囲は，$\boxed{\text{コサ}} \leqq t \leqq \sqrt{\boxed{\text{シ}}}$ である。

したがって，y は $t = \boxed{\text{ス}}$，すなわち $\theta = -\frac{\pi}{\boxed{\text{セ}}}$ のとき，最小値 $\boxed{\text{ソタ}}$ をとる。

[2] 自然数 x で，条件

$$12(\log_2\sqrt{x})^2 - 7\log_4 x - 10 > 0 \cdots\cdots\cdots①,\quad x + \log_3 x < 14 \cdots\cdots\cdots②$$

を満たすものを求めよう。

まず，x を正の実数として，条件①を考える。①は $X = \log_2 x$ とおくと

$$6X^2 - \boxed{\text{チ}}\,X - \boxed{\text{ツテ}} > 0$$

となる。この 2 次不等式を解くと

$$X < -\frac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}},\quad \frac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}} < X$$

となる。したがって，条件①を満たす最小の自然数 x は $\boxed{\text{ネ}}$ であり，$\boxed{\text{ネ}}$ 以上のすべての自然数 x は①を満たす。

次に，条件②について考えると，②を満たす最大の自然数 x は $\boxed{\text{ノハ}}$ であり，$\boxed{\text{ノハ}}$ 以下のすべての自然数 x は②を満たす。

したがって，求める x は $\boxed{\text{ネ}}$ 以上 $\boxed{\text{ノハ}}$ 以下の自然数である。

第２問

解答解説のページへ

座標平面上で，放物線 $y=x^2$ を C とする。

曲線 C 上の点 P の x 座標を a とする。点 P における C の接線 l の方程式は

$$y=\boxed{\text{アイ}}\,x-a^{\boxed{\text{ウ}}}$$

である。$a\neq 0$ のとき直線 l が x 軸と交わる点を Q とすると, Q の座標は

$$\left(\frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}},\ \boxed{\text{カ}}\right)$$

である。

$a>0$ のとき，曲線 C と直線 l および x 軸で囲まれた図形の面積を S とすると

$$S=\frac{a^{\boxed{\text{キ}}}}{\boxed{\text{クケ}}}$$

である。

$a<2$ のとき，曲線 C と直線 l および直線 $x=2$ で囲まれた図形の面積を T とすると

$$T=-\frac{a^3}{\boxed{\text{コ}}}+\boxed{\text{サ}}\,a^2-\boxed{\text{シ}}\,a+\frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}$$

である。

$a=0$ のときは $S=0$，$a=2$ のときは $T=0$ であるとして，$0\leqq a\leqq 2$ に対して $U=S+T$ とおく。a がこの範囲を動くとき，U は $a=\boxed{\text{ソ}}$ で最大値 $\dfrac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}$ をとり，$a=\dfrac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}}$ で最小値 $\dfrac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナニ}}}$ をとる。

第３問

解答解説のページへ

数直線上で点 P に実数 a が対応しているとき，a を点 P の座標といい，座標が a である点 P を $\mathrm{P}(a)$ で表す。

数直線上に点 $\mathrm{P}_1(1)$，$\mathrm{P}_2(2)$ をとる。線分 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ を $3:1$ に内分する点を P_3 とする。一般に，自然数 n に対して，線分 $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$ を $3:1$ に内分する点を P_{n+2} とする。点 P_n の座標を x_n とする。

$x_1=1$，$x_2=2$ であり，$x_3=\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ である。数列 $\{x_n\}$ の一般項を求めるために，この数列の階差数列を考えよう。自然数 n に対して $y_n=x_{n+1}-x_n$ とする。

$$y_1=\boxed{\text{ウ}},\quad y_{n+1}=\frac{\boxed{\text{エオ}}}{\boxed{\text{カ}}}y_n \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

である。したがって，$y_n=\left(\dfrac{\boxed{\text{エオ}}}{\boxed{\text{カ}}}\right)^{\boxed{\text{キ}}}\qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ であり

$$x_n=\frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}-\frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{ケ}}}\left(\frac{\boxed{\text{エオ}}}{\boxed{\text{カ}}}\right)^{\boxed{\text{サ}}} \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

となる。ただし，$\boxed{\text{キ}}$，$\boxed{\text{サ}}$ については，当てはまるものを，次の⓪～③のうちから１つずつ選べ。同じものを繰り返し選んでもよい。

⓪ $n-1$　　① n　　② $n+1$　　③ $n+2$

次に，自然数 n に対して，$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k|y_k|$ を求めよう。$r=\left|\dfrac{\boxed{\text{エオ}}}{\boxed{\text{カ}}}\right|$ とおくと

$$S_n-rS_n=\sum_{k=1}^{\boxed{\text{シ}}}r^{k-1}-nr^{\boxed{\text{ス}}} \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

であり，したがって

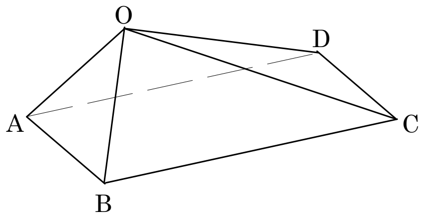
$$S_n=\frac{\boxed{\text{セソ}}}{\boxed{\text{タ}}}\left\{1-\left(\frac{1}{\boxed{\text{チ}}}\right)^{\boxed{\text{ツ}}}\right\}-\frac{n}{\boxed{\text{テ}}}\left(\frac{1}{\boxed{\text{ト}}}\right)^{\boxed{\text{ナ}}}$$

となる。ただし，$\boxed{\text{シ}}$，$\boxed{\text{ス}}$，$\boxed{\text{ツ}}$，$\boxed{\text{ナ}}$ については，当てはまるものを，次の⓪～③のうちから１つずつ選べ。同じものを繰り返し選んでもよい。

⓪ $n-1$　　① n　　② $n+1$　　③ $n+2$

第４問

解答解説のページへ



四角錐 OABCD において，三角形 OBC と三角形 OAD は合同で，OB $=1$，BC $=2$，OC $=\sqrt{3}$ であり，底面の四角形 ABCD は長方形である。AB $=2r$ とおき，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおく。

$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表すと

$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\overrightarrow{\boxed{\text{ア}}}-\overrightarrow{\boxed{\text{イ}}}+\vec{c}$ である。辺 OD を $1:2$ に内分する点を L とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{AL}}=-\frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}\vec{a}-\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{エ}}}\vec{b}+\frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{エ}}}\vec{c}$$

となる。

さらに辺 OB の中点を M，3 点 A，L，M の定める平面を α とし，平面 α と辺 OC との交点を N とする。点 N は平面 α 上にあることから，$\overrightarrow{\mathrm{AN}}$ は実数 s，t を用いて $\overrightarrow{\mathrm{AN}}=s\overrightarrow{\mathrm{AL}}+t\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ と表されるので

$$\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\left(\boxed{\text{キ}}-\frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}s-t\right)\vec{a}+\left(-\frac{s}{\boxed{\text{コ}}}+\frac{t}{\boxed{\text{サ}}}\right)\vec{b}+\frac{s}{\boxed{\text{シ}}}\vec{c}$$

となる。一方，点 N は辺 OC 上にもある。これらから，$\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\dfrac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}\vec{c}$ となる。

また，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\boxed{\text{ソ}}-\boxed{\text{タ}}r^2$，$\vec{b}\cdot\vec{c}=\boxed{\text{チ}}$，$\vec{a}\cdot\vec{c}=\boxed{\text{ツテ}}r^2$ である。よって，$\overrightarrow{\mathrm{AM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MN}}$ を計算すると，AB $=\sqrt{\boxed{\text{ト}}}$ のとき，直線 AM と直線 MN は垂直になることがわかる。