第１問

問題のページへ

[1] $a=3+2\sqrt{2}$，$b=2+\sqrt{3}$ のとき，

$$\frac{1}{a}=\frac{1}{3+2\sqrt{2}}=\frac{3-2\sqrt{2}}{9-8}=3-2\sqrt{2}\,,\ \ \frac{1}{b}=\frac{1}{2+\sqrt{3}}=\frac{2-\sqrt{3}}{4-3}=2-\sqrt{3}$$

$$\frac{a}{b}-\frac{b}{a}=(3+2\sqrt{2})(2-\sqrt{3})-(3-2\sqrt{2})(2+\sqrt{3})=8\sqrt{2}-6\sqrt{3}$$

さて，$|\,2abx-a^2\,|<b^2$ より，$a^2-b^2<2abx<a^2+b^2$ となり，

$$\frac{1}{2}\Big(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\Big)<x<\frac{1}{2}\Big(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\Big)$$

ここで，$\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}=(3+2\sqrt{2})(2-\sqrt{3})+(3-2\sqrt{2})(2+\sqrt{3})=12-4\sqrt{6}$ より，

$$\frac{1}{2}(8\sqrt{2}-6\sqrt{3})<x<\frac{1}{2}(12-4\sqrt{6}),\ \ 4\sqrt{2}-3\sqrt{3}<x<6-2\sqrt{6}$$

[2] 条件 $p:(a+b)^2+(a-2b)^2<5$，$q:|a+b|<1$ または $|a-2b|<2$ に対して，

(1) 命題「$q \Longrightarrow p$」に対し，q が成り立ち，p が成り立たない実数 a, b を探す。すると，この命題の反例として，$a=1$，$b=1$ が見つかる。

(2) 命題「$p \Longrightarrow q$」の対偶は，「$\overline{q} \Longrightarrow \overline{p}$」より，

$$|a+b|\geqq 1 \text{ かつ } |a-2b|\geqq 2 \Longrightarrow (a+b)^2+(a-2b)^2\geqq 5$$

(3) 命題「$\overline{q} \Longrightarrow \overline{p}$」は明らかに真なので，「$p \Longrightarrow q$」も真である。

そこで，(1)の結果と合わせると，

p は q であるための十分条件であるが，必要条件ではない

[解 説]

標準的な問題です。[2]についても疑心暗鬼にならなくて済むように誘導がつけられています。

第２問

問題のページへ

まず，G は，$y=ax^2+bx+c=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2}{4a}+c$ ………①

また，G と $y=-3x^2+12bx=-3(x-2b)^2+12b^2$ のグラフが同じ軸をもつので，

$$-\frac{b}{2a}=2b\,,\ a=-\frac{1}{4}\quad (b\neq 0)\ \cdots\cdots\cdots②$$

また，G が点 $(1,\ 2b-1)$ を通るとき，$2b-1=a+b+c$ となり，②を代入すると，

$$b-1+\frac{1}{4}=c\,,\ c=b-\frac{3}{4}\ \cdots\cdots\cdots③$$

②③を①に代入すると，$G:y=-\dfrac{1}{4}x^2+bx+b-\dfrac{3}{4}=-\dfrac{1}{4}(x-2b)^2+b^2+b-\dfrac{3}{4}$

(1)　G と x 軸が異なる 2 点で交わるとき，$b^2+b-\dfrac{3}{4}>0$ から，

$$4b^2+4b-3>0\,,\ (2b-1)(2b+3)>0$$

よって，$b<-\dfrac{3}{2}$，$\dfrac{1}{2}<b$ ………④

さらに，G が x 軸の正の部分が異なる 2 点で交わるときは，④に，軸 $x=2b>0$ より $b>0$，y 軸との交点 $y=b-\dfrac{3}{4}<0$ より $b<\dfrac{3}{4}$ という条件が加わり，

$$\frac{1}{2}<b<\frac{3}{4}$$

(2)　$0\leqq x\leqq b$ において，2 次関数①は，$x=0$ で最小値をとり，この値が $-\dfrac{1}{4}$ のとき，

$$b-\frac{3}{4}=-\frac{1}{4}\,,\ b=\frac{1}{2}$$

$x\geqq b$ において，2 次関数①は，$x=2b$ で最大値をとり，この値が 3 のとき，

$$b^2+b-\frac{3}{4}=3\,,\ 4b^2+4b-15=0\,,\ (2b-3)(2b+5)=0$$

$b>0$ より，$b=\dfrac{3}{2}$

すると，G_1 の頂点は $b=\dfrac{1}{2}$ から点 $(1,\ 0)$，G_2 の頂点は $b=\dfrac{3}{2}$ から点 $(3,\ 3)$ となるので，G_1 を x 軸方向に 2，y 軸方向に 3 だけ平行移動すれば，G_2 と一致する。

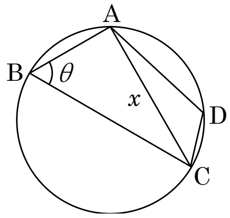
[解 説]

2 次関数についての標準的な問題です。最大・最小問題も，軸に位置による場合分けは必要ありません。

第３問

問題のページへ

(1)　円 O に内接する四角形 ABCD に対して，$\angle\mathrm{ABC}=\theta$，$\mathrm{AC}=x$ とおく。



$\mathrm{AB}=\sqrt{7}$，$\mathrm{BC}=2\sqrt{7}$ から，△ABC に余弦定理を適用して，

$$x^2=(\sqrt{7})^2+(2\sqrt{7})^2-2\cdot\sqrt{7}\cdot2\sqrt{7}\cos\theta$$
$$=35-28\cos\theta\cdots\cdots\cdots①$$

$\mathrm{CD}=\sqrt{3}$，$\mathrm{DA}=2\sqrt{3}$ から，△ACD に余弦定理を適用して，

$$x^2=(\sqrt{3})^2+(2\sqrt{3})^2-2\cdot\sqrt{3}\cdot2\sqrt{3}\cos(180^\circ-\theta)=15+12\cos\theta\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$35-28\cos\theta=15+12\cos\theta$，$40\cos\theta=20$ となり，

$$\cos\theta=\frac{1}{2}，\ \theta=60^\circ$$

①から，$x^2=35-14=21$ となり，$x=\sqrt{21}$

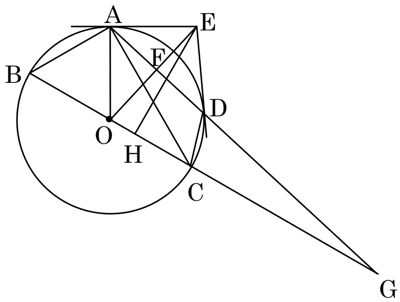
そこで，円 O の半径を R とおくと，正弦定理より，

$$2R=\frac{\sqrt{21}}{\sin60^\circ}，\ R=\frac{\sqrt{21}}{\sqrt{3}}=\sqrt{7}$$

また，四角形 ABCD の面積は，$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{7}\cdot2\sqrt{7}\sin60^\circ+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot2\sqrt{3}\sin120^\circ=5\sqrt{3}$

(2)　直線 AE は，円 O の接線なので，

$$\angle\mathrm{OAE}=90^\circ$$



また，EA＝ED より，AD は，円 O と点 E を中心とする半径 EA の円の共通弦となる。これより AD は 2 円の中心を結ぶ線分と直交し，

$$\angle\mathrm{AFE}=90^\circ$$

すると，$\triangle\mathrm{OAF}\backsim\triangle\mathrm{OEA}$ より，$\frac{\mathrm{OF}}{\mathrm{OA}}=\frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OE}}$

$$\mathrm{OF}\cdot\mathrm{OE}=\mathrm{OA}^2=7\cdots\cdots\cdots③$$

さらに，$\angle\mathrm{EFG}=\angle\mathrm{EHG}=90^\circ$ より，4 点 E，G，H，F は同一円周上にあるので，方べきの定理を用いて，③より，

$$\mathrm{OH}\cdot\mathrm{OG}=\mathrm{OF}\cdot\mathrm{OE}=7$$

[解 説]

$\mathrm{BC}=2\sqrt{7}$，$R=\sqrt{7}$ から，辺 BC が円 O の直径になっていることがわかります。この事実をもとに，図を書き直すことがポイントとなります。

第４問

問題のページへ

1 個のさいころを投げるとき，4 以下の目が出る確率 p は $p=\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$，5 以上の目が出る確率 q は $q=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$ である。以下，1 個のさいころを 8 回繰り返して投げるときを考える。

(1) 4 以下の目がちょうど 3 回出る確率は，${}_8\mathrm{C}_3\,p^3q^5=56p^3q^5$ である。

第 1 回目に 4 以下の目が出て，さらに次の 7 回の中で 4 以下の目がちょうど 2 回出る確率は，$p\times{}_7\mathrm{C}_2\,p^2q^5=21p^3q^5$ である。

第 1 回目に 5 以上の目が出て，さらに次の 7 回の中で 4 以下の目がちょうど 3 回出る確率は，$q\times{}_7\mathrm{C}_3\,p^3q^4=35p^3q^5$ である。

(2) ${}_8\mathrm{C}_3={}_7\mathrm{C}_2+{}_7\mathrm{C}_3$ であり，また ${}_7\mathrm{C}_2={}_7\mathrm{C}_5$，${}_7\mathrm{C}_3={}_7\mathrm{C}_4$ より，

$${}_8\mathrm{C}_3={}_7\mathrm{C}_4+{}_7\mathrm{C}_5$$

(3) 得点が 6 点となるのは，第 1 回目から 5 回目まで 5 以上の目，第 6 回目以降は 4 以下の目が出た場合より，その確率は，$q^5p^3=p^3q^5$ である。

得点が 3 点となるのは，第 1 回目と 2 回目が 5 以上の目，第 3 回目は 4 以下の目，第 4 回目以降に 4 以下の目が 2 回出た場合より，その確率は，

$$q^2\times p\times{}_5\mathrm{C}_2\,p^2q^3=10p^3q^5$$

同様に考えて，得点が 1 点となる確率は，$p\times{}_7\mathrm{C}_2\,p^2q^5=21p^3q^5$

得点が 2 点となる確率は，$q\times p\times{}_6\mathrm{C}_2\,p^2q^4=15p^3q^5$

得点が 4 点となる確率は，$q^3\times p\times{}_4\mathrm{C}_2\,p^2q^2=6p^3q^5$

得点が 5 点となる確率は，$q^4\times p\times{}_3\mathrm{C}_2\,p^2q=3p^3q^5$

以上より，得点の期待値は，

$$(1\times21+2\times15+3\times10+4\times6+5\times3+6\times1)\,p^3q^5=126p^3q^5$$

$p=\dfrac{2}{3}$，$q=\dfrac{1}{3}$ を代入すると，$126p^3q^5=126\times\dfrac{2^3}{3^8}=\dfrac{112}{729}$ となる。

[解 説]

得点が 0 点のときは省いたものの，期待値の計算は面倒です。しかし，この点を除くと，題意の読み違えがなければ，スムーズに進みます。