第１問

問題のページへ

[1]　連立方程式$xy=128$ ……①，$\dfrac{1}{\log_2 x}+\dfrac{1}{\log_2 y}=\dfrac{7}{12}$ ……②に対して，

①より，$\log_2 xy=\log_2 2^7$，$\log_2 x+\log_2 y=7$ ………③

②より，$\log_2 x+\log_2 y=\dfrac{7}{12}(\log_2 x)(\log_2 y)$となり，③を代入すると，

$(\log_2 x)(\log_2 y)=12$ ………④

③④より，$\log_2 x$，$\log_2 y$は２次方程式$t^2-7t+12=0$の解となり，$t=3,\ 4$

よって，$(x,\ y)=(2^3,\ 2^4)=(8,\ 16)$または$(x,\ y)=(2^4,\ 2^3)=(16,\ 8)$

[2]　一般に，$\cos x=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$から，$\sin 4\theta=\cos\theta$ ……①に対して，

$\sin 4\theta=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)$ ………①′

ここで，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$から，$0<4\theta<2\pi$，$0<\dfrac{\pi}{2}-\theta<\dfrac{\pi}{2}$である。

よって，①′より，$4\theta=\dfrac{\pi}{2}-\theta$または$4\theta=\pi-\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)$となり，$\theta=\dfrac{\pi}{6}$，$\dfrac{\pi}{10}$

さて，$\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{2}$であり，①より，$2\sin 2\theta\cos 2\theta=\cos\theta$

$4\sin\theta\cos\theta(1-2\sin^2\theta)=\cos\theta$，$(4\sin\theta-8\sin^3\theta)\cos\theta=\cos\theta$

$\cos\theta>0$から，$8\sin^3\theta-4\sin\theta+1=0$ ……②となり，

$(2\sin\theta-1)(4\sin^2\theta+2\sin\theta-1)=0$

$\theta=\dfrac{\pi}{10}$のとき，$\sin\theta\neq\dfrac{1}{2}$より，$4\sin^2\theta+2\sin\theta-1=0$

すると，$\sin\theta>0$から，$\sin\theta=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$

[解　説]

[2]は，$\sin\dfrac{\pi}{10}$の値を求めるために，非常に細かく誘導がついた問題です。そのため，かなりのボリュームがあり，解答欄の太字と細字に注意しながら粘り強く解き進める必要があります。

© 電送数学舎 2010

第２問

問題のページへ

(1)　$C : y=-x^3+9x^2+kx$ に対して，$y'=-3x^2+18x+k$

点 $\mathrm{Q}(t,\ -t^3+9t^2+kt)$ における接線の方程式は,

$$y-(-t^3+9t^2+kt)=(-3t^2+18t+k)(x-t)$$

$$y=(-3t^2+18t+k)x+2t^3-9t^2$$

点 $\mathrm{P}(1,\ 0)$ を通ることより，$0=(-3t^2+18t+k)+2t^3-9t^2$

$$-2t^3+12t^2-18t=k\cdots\cdots\cdots(*)$$

ここで，$p(t)=-2t^3+12t^2-18t$ とおくと,

$$p'(t)=-6t^2+24t-18$$

$$=-6(t-1)(t-3)$$

t	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$p'(t)$	−	0	+	0	−
$p(t)$	↘	−8	↗	0	↘

右表より，$p(t)$ は $t=1$ で極小値 -8 をとり，$t=3$ で極大値 0 をとる。

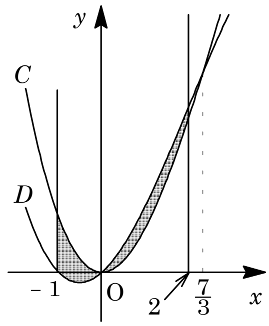
すると, 点 P を通る曲線 C の接線の本数は, (∗)の異なる実数解の個数に一致することから, 接線の本数が 2 本になるのは，$k=0$ または $k=-8$ のときである。

また，$k=5$ のときは 1 本，$k=-2$ のときは 3 本，$k=-12$ のときは 1 本となる。

(2)　$k=0$ のとき $C : y=-x^3+9x^2$，$D : y=-x^3+6x^2+7x$ の交点は,

$$-x^3+9x^2=-x^3+6x^2+7x,\ 3x^2-7x=0$$

よって，$x=0,\ \dfrac{7}{3}$ である。



すると, 2 曲線 C, D および 2 直線 $x=-1$，$x=2$ で囲まれた 2 つの図形の面積の和 S は,

$$S=\int_{-1}^{0}(3x^2-7x)\,dx+\int_{0}^{2}-(3x^2-7x)\,dx$$

$$=\left[x^3-\frac{7}{2}x^2\right]_{-1}^{0}-\left[x^3-\frac{7}{2}x^2\right]_{0}^{2}$$

$$=\frac{9}{2}+6=\frac{21}{2}$$

[解 説]

微積分の基本問題です。ただ, (1)の末尾の設問は, 単に解答量を増やすためだけとしか思えません。

© 電送数学舎 2010

第３問

問題のページへ

(1) 第 4 群の最後の項 a_4 は，$a_4=1+4+7+10=22$

ここで，a_n-a_{n-1} は第 n 群の項数より，$a_n-a_{n-1}=3n-2$ となり，$n \geqq 2$ で，

$$a_n=1+4+7+\cdots+(3n-2)=\frac{1+(3n-2)}{2}\cdot n=\frac{1}{2}n(3n-1)=\frac{3}{2}n^2-\frac{1}{2}n$$

なお，$a_1=1$ より，$n=1$ のときも成り立つ。

また, 600 が第 n 群に属するとすると,

$$\frac{1}{2}(n-1)(3n-4)<600 \leqq \frac{1}{2}n(3n-1)\ ,\ (n-1)(3n-4)<1200 \leqq n(3n-1)$$

ここで，$20\times 59=1180$，$21\times 62=1302$ より，$n=21$

すると，第 20 群の最後の項は $\frac{1}{2}\times 20\times 59=590$ より，600 は，$600-590=10$ 番目の項となる。

(2) 第 $(n+1)$ 群の $2n$ 番目の項 b_n は，$b_n=a_n+2n=\frac{3}{2}n^2+\frac{3}{2}n=\frac{3}{2}n(n+1)$ より，

$$\frac{1}{b_n}=\frac{2}{3n(n+1)}=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

よって，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{b_k}=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{2n}{3n+3}$

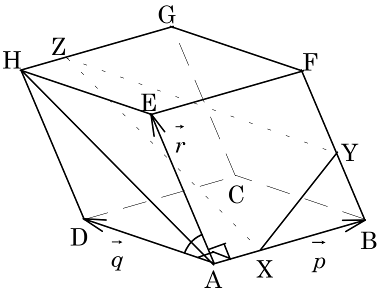
[解　説]

1999 年，2003 年に引き続き，群数列が出題されました。本年の題材は，自然数の列なので，考えやすいものです。

© 電送数学舎 2010

第４問

問題のページへ



(1)　$\mathrm{AB}=\mathrm{AD}=\mathrm{AE}=1$ から,

$$|\vec{p}|=|\vec{q}|=|\vec{r}|=1 \cdots\cdots\cdots①$$

$$\vec{p}\cdot\vec{q}=\vec{p}\cdot\vec{r}=1\cdot 1\cdot\cos\frac{\pi}{2}=0 \cdots\cdots\cdots②$$

$$\vec{q}\cdot\vec{r}=1\cdot 1\cdot\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2} \cdots\cdots\cdots③$$

また, $\overrightarrow{\mathrm{XY}}=(\vec{p}+b\vec{r})-a\vec{p}=(1-a)\vec{p}+b\vec{r}$

さらに, ①②より,

$$\overrightarrow{\mathrm{EC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{XZ}}=(\vec{p}+\vec{q}-\vec{r})\cdot(\vec{q}+\vec{r})=|\vec{q}|^2-|\vec{r}|^2=0$$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{EC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{XZ}}=0$ なので, 直線 EC と△XYZ を含む平面 α が垂直に交わる条件は,

$$\overrightarrow{\mathrm{EC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{XY}}=(\vec{p}+\vec{q}-\vec{r})\cdot(\,(1-a)\vec{p}+b\vec{r}\,)=0$$

①②③より, $(1-a)+\frac{1}{2}b-b=0$, $2a+b=2 \cdots\cdots\cdots④$

さて, $b=\frac{1}{2}$ のとき, ④より $a=\frac{3}{4}$ である。

ここで, 直線 EC と平面 α の交点 K とおくと, $\overrightarrow{\mathrm{EK}}=c\overrightarrow{\mathrm{EC}}$ から,

$$\overrightarrow{\mathrm{AK}}=\overrightarrow{\mathrm{AE}}+c\overrightarrow{\mathrm{EC}}=\vec{r}+c(\vec{p}+\vec{q}-\vec{r})=c\vec{p}+c\vec{q}+(1-c)\vec{r} \cdots\cdots\cdots⑤$$

また, 点 K は平面 α 上にあるから,

$$\overrightarrow{\mathrm{AK}}=\overrightarrow{\mathrm{AX}}+s\overrightarrow{\mathrm{XY}}+t\overrightarrow{\mathrm{XZ}}=\frac{3}{4}\vec{p}+s\left(\frac{1}{4}\vec{p}+\frac{1}{2}\vec{r}\right)+t(\vec{q}+\vec{r})$$

$$=\left(\frac{1}{4}s+\frac{3}{4}\right)\vec{p}+t\vec{q}+\left(\frac{1}{2}s+t\right)\vec{r} \cdots\cdots\cdots⑥$$

$\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$ は 1 次独立なので, ⑤⑥より,

$$c=\frac{1}{4}s+\frac{3}{4} \cdots\cdots\cdots⑦,\ c=t \cdots\cdots\cdots⑧,\ 1-c=\frac{1}{2}s+t \cdots\cdots\cdots⑨$$

⑦より $s=4c-3$ となり, ⑧と合わせて⑨に代入すると,

$$2-2c=4c-3+2c,\ c=\frac{5}{8}$$

このとき, $\overrightarrow{\mathrm{EK}}=\frac{5}{8}\overrightarrow{\mathrm{EC}}=\frac{5}{8}(\vec{p}+\vec{q}-\vec{r})$ となり, ①②③より,

$$|\vec{p}+\vec{q}-\vec{r}|^2=1^2+1^2+1^2-2\cdot\frac{1}{2}=2$$

よって, $|\overrightarrow{\mathrm{EK}}|=\frac{5}{8}|\vec{p}+\vec{q}-\vec{r}|=\frac{5}{8}\sqrt{2}$ となる。

[解 説]

内容は基本事項の組合せとなっています。ただ, 参考図が問題文に描かれているものの, 分量がかなりあり, 時間的に厳しい問題です。

© 電送数学舎 2010