第１問

解答解説のページへ

[1] 連立方程式(＊)

$$xy=128 \cdots\cdots ①,\quad \frac{1}{\log_2 x}+\frac{1}{\log_2 y}=\frac{7}{12} \cdots\cdots ②$$

を満たす正の実数 x, y を求めよう。ただし，$x \neq 1$，$y \neq 1$ とする。

①の両辺を 2 を底とする対数をとると，$\log_2 x+\log_2 y=\boxed{ア}$ が成り立つ。これと②より，$(\log_2 x)(\log_2 y)=\boxed{イウ}$ である。

したがって，$\log_2 x$，$\log_2 y$ は 2 次方程式 $t^2-\boxed{エ}t+\boxed{オカ}=0 \cdots\cdots ③$の解である。③の解は $t=\boxed{キ}$，$\boxed{ク}$ である。ただし，$\boxed{キ}$ と $\boxed{ク}$ は解答の順序を問わない。よって，連立方程式(＊)の解は $(x,\ y)=\left(\boxed{ケ},\ \boxed{コサ}\right)$ または $(x,\ y)=\left(\boxed{コサ},\ \boxed{ケ}\right)$ である。

[2] $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ の範囲で，$\sin 4\theta=\cos\theta \cdots\cdots ①$を満たす θ と $\sin\theta$ の値を求めよう。

一般に，すべての x について，$\cos x=\sin\left(\boxed{シ}-x\right)$ である。$\boxed{シ}$ に当てはまるものを，次の⓪～②のうちから 1 つ選べ。

⓪ π　　① $\frac{\pi}{2}$　　② $-\frac{\pi}{2}$

したがって，①が成り立つとき，$\sin 4\theta=\sin\left(\boxed{シ}-\theta\right)$ となり，$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ の範囲で 4θ，$\boxed{シ}-\theta$ のとりうる値の範囲を考えれば，$4\theta=\boxed{シ}-\theta$ または $4\theta=\pi-\left(\boxed{シ}-\theta\right)$ となる。よって，①を満たす θ は $\theta=\dfrac{\pi}{\boxed{ス}}$ または $\theta=\dfrac{\pi}{\boxed{セソ}}$ である。

$$\sin\frac{\pi}{\boxed{ス}}=\frac{\boxed{タ}}{\boxed{チ}}$$ である。$\sin\dfrac{\pi}{\boxed{セソ}}$ の値を求めよう。

①より，$\boxed{ツ}\sin 2\theta\cos 2\theta=\cos\theta$ となり，この式の左辺を 2 倍角の公式を用いて変形すれば，$\left(\boxed{テ}\sin\theta-\boxed{ト}\sin^3\theta\right)\cos\theta=\cos\theta$ となる。ここで $\cos\theta>0$ であるから，$\boxed{ト}\sin^3\theta-\boxed{テ}\sin\theta+1=0 \cdots\cdots ②$が成り立つ。

$\sin\theta=\dfrac{\boxed{タ}}{\boxed{チ}}$ は②を満たしている。$\theta=\dfrac{\pi}{\boxed{セソ}}$ とすると，$\sin\theta\neq\dfrac{\boxed{タ}}{\boxed{チ}}$ であるから，$\boxed{ナ}\sin^2\theta+\boxed{ニ}\sin\theta-1=0$ となる。ここで，$\sin\dfrac{\pi}{\boxed{セソ}}>0$ より，

$$\sin\frac{\pi}{\boxed{セソ}}=\frac{\boxed{ヌネ}+\sqrt{\boxed{ノ}}}{\boxed{ハ}}$$ である。

第２問

解答解説のページへ

k を実数とし，座標平面上に点P(1, 0)をとる。曲線

$$y=-x^3+9x^2+kx$$

を C とする。

(1) 点Q$(t,\ -t^3+9t^2+kt)$ における曲線 C の接線が点Pを通るとすると

$$-\boxed{\text{ア}}t^3+\boxed{\text{イウ}}t^2-\boxed{\text{エオ}}t=k$$

が成り立つ。

$$p(t)=-\boxed{\text{ア}}t^3+\boxed{\text{イウ}}t^2-\boxed{\text{エオ}}t$$

とおくと，関数 $p(t)$ は $t=\boxed{\text{カ}}$ で極小値 $\boxed{\text{キク}}$ をとり，$t=\boxed{\text{ケ}}$ で極大値 $\boxed{\text{コ}}$ をとる。

したがって，点Pを通る曲線 C の接線の本数がちょうど２本になるのは，k の値が $\boxed{\text{サ}}$ または $\boxed{\text{シス}}$ のときである。また，点Pを通る曲線 C の接線の本数は $k=5$ のとき $\boxed{\text{セ}}$ 本，$k=-2$ のとき $\boxed{\text{ソ}}$ 本，$k=-12$ のとき $\boxed{\text{タ}}$ 本となる。

(2) $k=0$ とする。曲線

$$y=-x^3+6x^2+7x$$

を D とする。曲線 C と D の交点の x 座標は $\boxed{\text{チ}}$ と $\dfrac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}}$ である。

$-1\leqq x\leqq 2$ の範囲において，２曲線 C, D および２直線 $x=-1$，$x=2$ で囲まれた２つの図形の面積の和は $\dfrac{\boxed{\text{トナ}}}{\boxed{\text{ニ}}}$ である。

第３問

解答解説のページへ

自然数の列 1, 2, 3, 4, …を，次のように群に分ける。

1 ｜ 2, 3, 4, 5 ｜ 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 ｜…

第１群　第２群　　　第３群

ここで，一般に第 n 群は $(3n-2)$ 個の項からなるものとする。第 n 群の最後の項を a_n で表す。

(1)　$a_1=1$，$a_2=5$，$a_3=12$，$a_4=\boxed{アイ}$ である。

$$a_n-a_{n-1}=\boxed{ウ}\,n-\boxed{エ}\quad(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$$

が成り立ち

$$a_n=\frac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}n^{\boxed{キ}}-\frac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}n\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

である。

よって, 600 は，第 $\boxed{コサ}$ 群の小さい方から $\boxed{シス}$ 番目の項である。

(2)　$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対し，第 $(n+1)$ 群の小さい方から $2n$ 番目の項を b_n で表すと

$$b_n=\frac{\boxed{セ}}{\boxed{ソ}}n^{\boxed{タ}}+\frac{\boxed{チ}}{\boxed{ツ}}n$$

であり，

$$\frac{1}{b_n}=\frac{\boxed{テ}}{\boxed{ト}}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+\boxed{ナ}}\right)$$

が成り立つ。これより

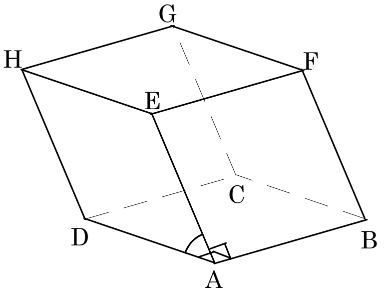
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{b_k}=\frac{\boxed{ニ}\,n}{\boxed{ヌ}\,n+\boxed{ネ}}\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

となる。

第４問

解答解説のページへ

　2 つずつ平行な 3 組の平面で囲まれた立体を平行六面体という。辺の長さがすべて 1 の平行六面体 ABCD-EFGH があり，$\angle \mathrm{EAB}=\angle \mathrm{DAB}=\dfrac{\pi}{2}$，$\angle \mathrm{EAD}=\dfrac{\pi}{3}$ である。$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{p}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{q}$，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\vec{r}$ とおく。



　$0<a<1,\ 0<b<1$ とする。辺 AB を $a:(1-a)$ の比に内分する点を X, 辺 BF を $b:(1-b)$ の比に内分する点を Y とする。点 X を通り直線 AH に平行な直線と辺 GH との交点を Z とする。三角形 XYZ を含む平面を α とする。

(1)　$\vec{p}\cdot\vec{q}=\vec{p}\cdot\vec{r}=\boxed{\text{ア}}$，$\vec{q}\cdot\vec{r}=\dfrac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$ である。ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{XY}}$ は, a, b, $\vec{p}$，$\vec{r}$ を用いて，$\overrightarrow{\mathrm{XY}}=\left(1-\boxed{\text{エ}}\right)\vec{p}+\boxed{\text{オ}}\,\vec{r}$ と表される。

　$\overrightarrow{\mathrm{EC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{XZ}}=\boxed{\text{カ}}$ である。

(2)　直線 EC と平面 α が垂直に交わるとし，交点を K とする。$\overrightarrow{\mathrm{EC}}$ が三角形 XYZ の 2 辺と垂直であることから，$\boxed{\text{キ}}\,a+b=\boxed{\text{ク}}$ が成り立つ。

　以下では，$b=\dfrac{1}{2}$ とする。このとき $a=\dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$ である。$\overrightarrow{\mathrm{EK}}$ を実数 c を用いて $\overrightarrow{\mathrm{EK}}=c\overrightarrow{\mathrm{EC}}$ と表すと，$\overrightarrow{\mathrm{AK}}=\overrightarrow{\mathrm{AE}}+c\overrightarrow{\mathrm{EC}}$ である。一方，点 K は平面 α 上にあるから，$\overrightarrow{\mathrm{AK}}$ は実数 s,t を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{AK}}=\overrightarrow{\mathrm{AX}}+s\overrightarrow{\mathrm{XY}}+t\overrightarrow{\mathrm{XZ}}=\left(\frac{1}{\boxed{\text{サ}}}s+\frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}\right)\vec{p}+t\vec{q}+\left(\frac{1}{\boxed{\text{シ}}}s+t\right)\vec{r}$$

と表される。これらより，$c=\dfrac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}$ である。よって，点 E と平面 α との距離 $|\overrightarrow{\mathrm{EK}}|$ は $\dfrac{\boxed{\text{ソ}}\sqrt{\boxed{\text{タ}}}}{\boxed{\text{チ}}}$ となる。