第１問

問題のページへ

[1]　α の分母を有理化すると，$\alpha=\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}=\dfrac{(\sqrt{7}-\sqrt{3})^2}{7-3}=\dfrac{5-\sqrt{21}}{2}$ となる。

また，$6x^2-7x+1=0$ の解は，$(6x-1)(x-1)=0$ より，$x=\dfrac{1}{6}$，1

ここで，$0<\dfrac{5-\sqrt{21}}{2}<\dfrac{5-\sqrt{16}}{2}<1$ より，$0<\dfrac{5-\sqrt{21}}{2}<1<\dfrac{2}{5-\sqrt{21}}$

さらに，$\dfrac{5-\sqrt{21}}{2}-\dfrac{1}{6}=\dfrac{14-3\sqrt{21}}{6}=\dfrac{14^4-3^2\times 21}{6(14+3\sqrt{21})}>0$ となり，

$$\frac{1}{6}<\frac{5-\sqrt{21}}{2}<1<\frac{2}{5-\sqrt{21}}$$

[2]　k, l, m を 0 以上の整数とすると，

$$p:n=5k+1,\ q:n=10l+1,\ r:n=2m+1$$

さて，「p かつ r」: $n=5k+1=2m+1$ から，$5k=2m$ となり，k は偶数となる。

よって，「p かつ r」は q であるための必要十分条件である。

また，2 より大きい素数はすべて奇数であることより，s は r であるための十分条件であるが，必要条件でない。

対偶をとると，$\overline{r}$ は $\overline{s}$ であるための十分条件であるが，必要条件でない。

ここで，$s \Leftrightarrow$「r かつ s」であり，「p かつ r」$\Leftrightarrow q$ より「p かつ r かつ s」$\Leftrightarrow$「q かつ s」となるので，

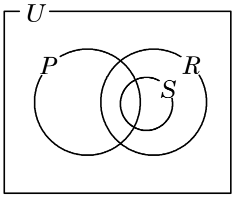
「p かつ s」$\Leftrightarrow$「p かつ r かつ s」$\Leftrightarrow$「q かつ s」

よって，「p かつ s」は「q かつ s」であるための必要十分条件である。

条件 p を満たす自然数全体の集合を P，条件 r を満たす自然数全体の集合を R，条件 s を満たす自然数全体の集合を S とすると，

$$S\subset R \text{ かつ } P\cap S\neq\phi$$

これより，P, R, S の関係は，右図で表される。



[解　説]

答だけを求めるならば，[1]では $\sqrt{21}$　4.6 として計算し，[2]では具体的に羅列した方が早いのは確かです。

第２問

問題のページへ

G_1 : $y=3x^2-2x-1$，G_2 $y=x^2+2ax+b=(x+a)^2-a^2+b$ に対して，G_2 の頂点 $(-a,\ -a^2+b)$ は G_1 上にあることより，

$$-a^2+b=3a^2+2a-1,\ b=4a^2+2a-1$$

これより，G_2 の頂点の座標は，$(-a,\ 3a^2+2a-1)$ となる。

(1)　G_2 の頂点の y 座標は，$y=3a^2+2a-1=3\left(a+\frac{1}{3}\right)^2-\frac{4}{3}$

すると，$a=-\frac{1}{3}$ のとき最小値 $-\frac{4}{3}$ をとり，このとき，G_2 : $y=\left(x-\frac{1}{3}\right)^2-\frac{4}{3}$

G_2 の軸は $x=\frac{1}{3}$ となり，G_2 と x 軸との交点の x 座標は，$\left(x-\frac{1}{3}\right)^2-\frac{4}{3}=0$ より，

$$x-\frac{1}{3}=\pm\frac{2}{\sqrt{3}},\ x=\frac{1\pm2\sqrt{3}}{3}$$

(2)　G_2 が点 $(0,\ 5)$ を通るとき，$b=5$ から，$4a^2+2a-1=5$ となり，

$$2a^2+a-3=0,\ (2a+3)(a-1)=0,\ a=1,\ -\frac{3}{2}$$

$a=1$ のとき，G_2 の頂点 $(-1,\ 4)$ となる。

これを x 軸方向に k, y 軸方向に k だけ平行移動したときの頂点 $(-1+k,\ 4+k)$ が，G_1 上にあることから，

$$4+k=3(-1+k)^2-2(-1+k)-1,\ 3k^2-9k=0$$

$k\neq0$ から，$k=3$ となる。

[解 説]

2 次関数の基本問題です。場合分けも必要ありません。

第３問

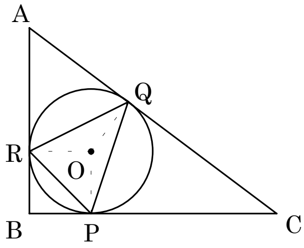
問題のページへ

(1)　$\mathrm{OP}=\mathrm{OR}=r$ とおくと，$\mathrm{BP}=\mathrm{BR}=r$ となり，

$$\mathrm{AR}=\mathrm{AQ}=3-r,\ \ \mathrm{CP}=\mathrm{CQ}=5-r$$

よって，$(3-r)+(4-r)=5$ から，$r=1$

すると，$\mathrm{AR}=\mathrm{AQ}=2$，$\cos A=\dfrac{3}{5}$ となり，△ARQ に余弦定理を適用すると，



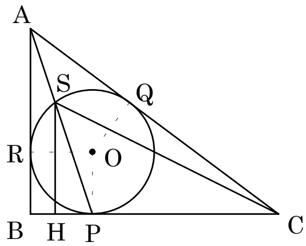
$$\mathrm{QR}^2=2^2+2^2-2\cdot 2\cdot 2\cdot\frac{3}{5}=\frac{16}{5},\ \ \mathrm{QR}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$$

また，△PQR に正弦定理を適用すると，

$$\frac{\mathrm{QR}}{\sin\angle\mathrm{QPR}}=2r,\ \ \sin\angle\mathrm{QPR}=\frac{\mathrm{QR}}{2r}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

(2)　$\mathrm{AP}=\sqrt{\mathrm{AB}^2+\mathrm{BP}^2}=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$

ここで，方べきの定理より，$\mathrm{AR}^2=\mathrm{AS}\cdot\mathrm{AP}$ となり，



$$\mathrm{AS}=\frac{\mathrm{AR}^2}{\mathrm{AP}}=\frac{2^2}{\sqrt{10}}=\frac{2\sqrt{10}}{5}$$

$$\mathrm{SP}=\mathrm{AP}-\mathrm{AS}=\sqrt{10}-\frac{2\sqrt{10}}{5}=\frac{3\sqrt{10}}{5}$$

また, SH // AB，$\mathrm{PS}:\mathrm{PA}=\dfrac{3\sqrt{10}}{5}:\sqrt{10}=3:5$ より，

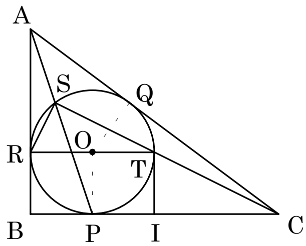
$$\mathrm{HP}:\mathrm{BP}=\mathrm{SH}:\mathrm{AB}=3:5$$

よって，$\mathrm{HP}=\dfrac{3}{5}\mathrm{BP}=\dfrac{3}{5}$，$\mathrm{SH}=\dfrac{3}{5}\mathrm{AB}=\dfrac{9}{5}$，$\tan\angle\mathrm{BCS}=\dfrac{\mathrm{SH}}{\mathrm{CH}}=\dfrac{\mathrm{SH}}{\mathrm{CP}+\mathrm{HP}}=\dfrac{1}{2}$

(3)　T から BC に垂線 TI を下ろすと，

$$\tan\angle\mathrm{BCT}=\frac{\mathrm{TI}}{\mathrm{CI}}=\frac{1}{2}$$

すると，$\tan\angle\mathrm{BCS}=\tan\angle\mathrm{BCT}$ となり，3 点 C，T，S は同一直線上にある。



ここで, RT は円 O の直径なので，$\angle\mathrm{RSC}=90^\circ$

また，$\angle\mathrm{POT}=90^\circ$ より，$\angle\mathrm{PSC}=\dfrac{1}{2}\angle\mathrm{POT}=45^\circ$

[解 説]

三角比と平面図形を融合した本格的な問題です。ただ，最初の r の値を求める上記の方法は有名ですが，問題文のマーク の形式を見ると，$r=1$ であるのは明らかです。

第4問

問題のページへ

赤玉5個, 白玉5個, 黒玉1個の合計11個の玉から, 5個の玉の取り出し方は,

$${}_{11}\mathrm{C}_5=\frac{11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=462 \text{（通り）}$$

(1) 得点が 0 点となる取り出し方について, 黒玉が含まれている場合は, 異なる数字の選び方が ${}_5\mathrm{C}_4$ 通り, 赤玉・白玉の対応の仕方が 2^4 通りより,

$${}_5\mathrm{C}_4\times 2^4=80 \text{（通り）}$$

また, 黒玉が含まれていない場合は, 異なる数字の選び方が 1 通り, 赤玉・白玉の対応の仕方が 2^5 通りより,

$$1\times 2^5=32 \text{（通り）}$$

次に, 得点が1点となる取り出し方について, 黒玉が含まれている場合は, 1組の同じ数字の選び方が ${}_5\mathrm{C}_1$ 通り, 異なる数字の選び方が ${}_4\mathrm{C}_2$ 通り, 赤玉・白玉の対応の仕方が 2^2 通りより,

$${}_5\mathrm{C}_1\times {}_4\mathrm{C}_2\times 2^2=120 \text{（通り）}$$

また, 黒玉が含まれていない場合は, 1 組の同じ数字の選び方が ${}_5\mathrm{C}_1$ 通り, 異なる数字の選び方が ${}_4\mathrm{C}_3$ 通り, 赤玉・白玉の対応の仕方が 2^3 通りより,

$${}_5\mathrm{C}_1\times {}_4\mathrm{C}_3\times 2^3=160 \text{（通り）}$$

(2) (1)より, 得点が0点である確率は, $\dfrac{80+32}{462}=\dfrac{8}{33}$

また, 得点が1点である確率は, $\dfrac{120+160}{462}=\dfrac{20}{33}$

すると, 得点が2点である確率は, $1-\left(\dfrac{8}{33}+\dfrac{20}{33}\right)=\dfrac{5}{33}$

したがって, 得点の期待値は,

$$0\times\frac{8}{33}+1\times\frac{20}{33}+2\times\frac{5}{33}=\frac{10}{11}$$

[解 説]

確率と期待値に関する基本問題です。図を書いて具体的に考える方がミスが少ないでしょう。