

第 1 問

問題のページへ

[1] $x \geq 2, y \geq 2$ より, $s = \log_2 x - \log_2 2 = 1 \dots\dots$, $t = \log_2 y - 1 \dots\dots$

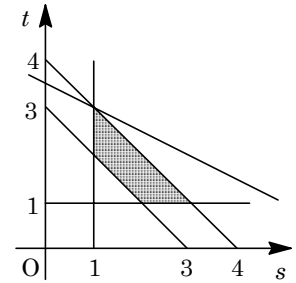
$8 \leq xy \leq 16$ より, $\log_2 8 \leq \log_2 xy \leq \log_2 16$ となり, $3 \leq s+t \leq 4 \dots\dots\dots$

$$z = \log_2 \sqrt{x} + \log_2 y = \frac{1}{2} \log_2 x + \log_2 y = \frac{1}{2} s + t \dots\dots\dots$$

不等式 $3 \leq s+t \leq 4$ を満たす st 平面上の領域は、右図の網点部となり、 $t = -\frac{1}{2}s + z$ から、

$$t = -\frac{1}{2}s + z$$

すると、右図より、 z は $(s, t) = (1, 3)$ のとき、最大値 $\frac{1}{2} + 3 = \frac{7}{2}$ をとる。すなわち、 $x = 2^1 = 2$, $y = 2^3 = 8$ のとき、 z は最大値をとる。



[2] $5 \sin \theta - 3 \cos 2\theta = 3 \dots\dots(*)$ より, $5 \sin \theta - 3(1 - 2 \sin^2 \theta) = 3$ となり,

$$6 \sin^2 \theta + 5 \sin \theta - 6 = 0, (2 \sin \theta + 3)(3 \sin \theta - 2) = 0$$

$-1 \leq \sin \theta \leq 1$ より, $\sin \theta = \frac{2}{3}$ となる。

このとき, $\cos \theta = \pm \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \pm \frac{\sqrt{5}}{3}$ となり, $0 < \theta_1 < \theta_2 < 2\pi$ とすると,

$$\cos \theta_1 = \frac{\sqrt{5}}{3}, \cos \theta_2 = -\frac{\sqrt{5}}{3}$$

ここで, $\frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{\sqrt{5}}{3} < \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$ より, $\frac{\pi}{5} < \theta_1 < \frac{\pi}{4}$ である。

また, $\theta_2 = \pi - \theta_1$ から, $\frac{3}{4}\pi < \theta_2 < \frac{4}{5}\pi$ となるので, $n\theta_1 > \theta_2$ を満たす自然数 n のうち最小なものは, $n = 4$ である。

[解 説]

関数についての基本的な問題です。ただ、[2]の後半は、 $\sin \theta = \frac{2}{3} = 0.6$ から考えて、 θ は $\frac{\pi}{4}$ より少し小さいという感覚で、まず答を予想しましたが。

第 2 問

問題のページへ

点 $Q(u, v)$ に関し、点 $A(1, -2)$ と対称な点を $P(x, y)$ とすると、線分 AP の中点が Q より、

$$u = \frac{x+1}{2}, \quad v = \frac{y-2}{2}$$

Q が放物線 $C: y = 2x^2 \dots\dots$ 上を動くとき、 $v = 2u^2$ より、

$$\frac{y-2}{2} = 2\left(\frac{x+1}{2}\right)^2, \quad y = (x+1)^2 + 2$$

$$D: y = x^2 + 2x + 3 \dots\dots\dots$$

ここで、 $y = 2x^2$ を連立して、 $2x^2 = x^2 + 2x + 3$

$$x^2 - 2x - 3 = 0, \quad (x-3)(x+1) = 0$$

よって、 $x = -1, 3$ から、放物線 C と D の交点は、 $R(-1, 2), S(3, 18)$ となる。

さて、 $y = 2x^2$ より $y' = 4x$ となり、 $x = -1$ のとき $y' = -4$ より、点 R における放物線 D の接線の方程式は、 $y = 2$ である。

また、 $x = 3$ のとき $y' = 12$ であるので、点 S における放物線 D の接線の方程式は、

$$y - 18 = 12(x - 3), \quad y = 12x - 18$$

$-1 < a < 3$ のとき、 $P(a, a^2 + 2a + 3), H(a, 2a^2)$ から、

$$PH = a^2 + 2a + 3 - 2a^2 = -a^2 + 2a + 3$$

これより、 $\triangle PHR$ の面積 $S(a)$ は、

$$S(a) = \frac{1}{2}(-a^2 + 2a + 3)(a + 1)$$

$$= \frac{1}{2}(-a^3 + a^2 + 5a + 3)$$

$$S'(a) = \frac{1}{2}(-3a^2 + 2a + 5)$$

$$= -\frac{1}{2}(3a - 5)(a + 1)$$

よって、 $S(a)$ の増減は右表のようになり、 $a = \frac{5}{3}$ のとき、最大値をとる。

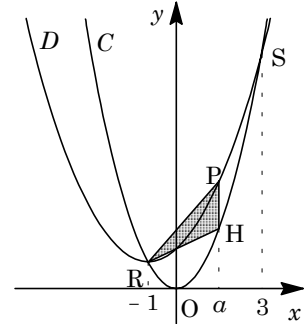
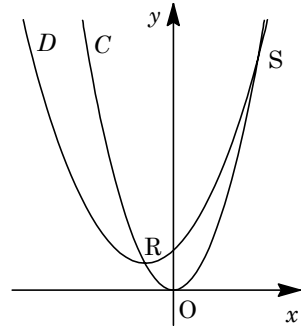
このとき、 $H\left(\frac{5}{3}, \frac{50}{9}\right)$ となり、直線 HR は傾き

が $\frac{\frac{50}{9} - 2}{\frac{5}{3} + 1} = \frac{4}{3}$ から、その方程式は、

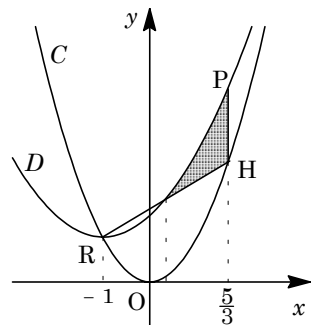
$$y - 2 = \frac{4}{3}(x + 1), \quad y = \frac{4}{3}(x + 1) + 2 \dots\dots\dots$$

を連立して、 $(x+1)^2 + 2 = \frac{4}{3}(x+1) + 2$

$$(x+1)\left(x+1-\frac{4}{3}\right) = 0, \quad (x+1)\left(x-\frac{1}{3}\right) = 0$$



a	-1	...	$\frac{5}{3}$...	3
$S'(a)$	0	+	0	-	
$S(a)$		↗		↘	



すると、点 R と異なる交点の x 座標は、 $x \neq -1$ より $x = \frac{1}{3}$ である。

以上より、 $\frac{1}{3} < x < \frac{5}{3}$ において、放物線 D と直線 PH および直線 HR で囲まれた図形の面積 T は、

$$\begin{aligned} T &= \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{5}{3}} \left(x^2 + 2x + 3 - \frac{4}{3}x - \frac{10}{3} \right) dx = \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{5}{3}} \left(x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{3} \right) dx \\ &= \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{5}{3}} (x+1) \left(x - \frac{1}{3} \right) dx = \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{5}{3}} \left(x - \frac{1}{3} + \frac{4}{3} \right) \left(x - \frac{1}{3} \right) dx \\ &= \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{5}{3}} \left\{ \left(x - \frac{1}{3} \right)^2 + \frac{4}{3} \left(x - \frac{1}{3} \right) \right\} dx = \left[\frac{1}{3} \left(x - \frac{1}{3} \right)^3 + \frac{2}{3} \left(x - \frac{1}{3} \right)^2 \right]_{\frac{1}{3}}^{\frac{5}{3}} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{64}{27} + \frac{2}{3} \cdot \frac{16}{9} = \frac{160}{81} \end{aligned}$$

[解 説]

軌跡と微積分の融合問題です。内容は標準的であるものの、問題の量、そしてそれに伴う計算量は半端ではありません。

第 3 問

問題のページへ

- (1) 数列
- $\{a_n\}$
- は、初項 1, 公比
- $\frac{1}{3}$
- の等比数列より、
- $a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$
- となり、

$$b_n = a_{2n} = \left(\frac{1}{3}\right)^{2n-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{2(n-1)+1} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{9}\right)^{n-1}$$

よって、数列 $\{b_n\}$ は、初項 $\frac{1}{3}$, 公比 $\frac{1}{9}$ の等比数列であり、

$$T_n = \sum_{k=1}^n b_k = \frac{\frac{1}{3} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{9}\right)^n \right\}}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{3}{8} \left(1 - \frac{1}{9^n} \right)$$

また、積 $b_1 b_2 \cdots b_n$ は、

$$b_1 b_2 \cdots b_n = a_2 a_4 \cdots a_{2n} = \left(\frac{1}{3}\right)^1 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdots \left(\frac{1}{3}\right)^{2n-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{1+3+\cdots+(2n-1)} = \left(\frac{1}{3}\right)^{n^2} = \frac{1}{3^{n^2}}$$

- (2)
- $c_n = 2n \cdot b_n = 2n \left(\frac{1}{3}\right)^{2n-1}$
- ,
- $c_{n+1} = 2(n+1) \left(\frac{1}{3}\right)^{2n+1} = \frac{1}{9} (2n+2) \left(\frac{1}{3}\right)^{2n-1}$
- より、

$$9c_{n+1} - c_n = 2b_n$$

すると、 $\sum_{k=1}^n (9c_{k+1} - c_k) = 2 \sum_{k=1}^n b_k$ より、 $\sum_{k=1}^n (9c_{k+1} - c_k) = 2T_n \cdots \cdots$ また、 $U_n = \sum_{k=1}^n c_k = c_1 + c_2 + c_3 + \cdots + c_n$ とおくと、

$$\sum_{k=1}^n (9c_{k+1} - c_k) = 8(c_2 + c_3 + \cdots + c_n) + 9c_{n+1} - c_1 = 8U_n + 9c_{n+1} - 9c_1 \cdots \cdots$$

$$\text{より、} 8U_n + 9c_{n+1} - 9c_1 = 2 \cdot \frac{3}{8} \left(1 - \frac{1}{9^n} \right)$$

$$8U_n = 2 \cdot \frac{3}{8} \left(1 - \frac{1}{9^n} \right) - 9 \cdot 2(n+1) \left(\frac{1}{3}\right)^{2n+1} + 9 \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{27}{4} - \frac{24n+27}{4} \cdot \frac{1}{9^n}$$

$$\text{よって、} U_n = \frac{27}{32} - \frac{24n+27}{32} \cdot \frac{1}{9^n}$$

[解 説]

(2)は、(等差)×(等比)のタイプの数列の和を求める有名な設問ですが、誘導に逆らわずに計算を進めなくてははいけません。

第 4 問

問題のページへ

(1) $\overrightarrow{BC} = (-1, 2, 0)$, $\overrightarrow{BA} = (-1, 0, 1)$ より, $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} = 1$ となり,

$$ABC = \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{BC}|^2 |\overrightarrow{BA}|^2 - (\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA})^2} = \frac{1}{2} \sqrt{5 \times 2 - 1^2} = \frac{3}{2}$$

(2) $BB_1 : B_1E = a : (1-a)$ より,

$$\overrightarrow{BB_1} = a\overrightarrow{BE} = a\vec{v}$$

点 A_1 を $\overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BB_1}$ で定めたとき, 線分

A_1B_1 上の点 P は, $0 < b < 1$ として,

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OB} + a\overrightarrow{BE} + b\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OB} + b\vec{u} + a\vec{v}$$

また, AE 上の点 Q は, $0 < c < 1$ として,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OQ} &= \overrightarrow{OB} + c\overrightarrow{BA} + (1-c)\overrightarrow{BE} \\ &= \overrightarrow{OB} + c\vec{u} + (1-c)\vec{v} \end{aligned}$$

すると, $b = c$ かつ $a = 1 - c$, すなわち $b = c = -a + 1$ のとき, P と Q は一致する。
 すなわち, 線分 A_1B_1 と AE は, AE を $(1-c) : c = a : (1-a)$ に内分する点で交わり,
 この交点を E_1 とおく。

同様に, 点 C_1 を $\overrightarrow{OC_1} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{BB_1}$ で定めたとき, 線分 A_1C_1 と線分 AD は, AD を
 $a : (1-a)$ に内分する点で交わり, この交点を D_1 とおくと,

$$\overrightarrow{D_1E_1} = a\overrightarrow{DE}$$

さらに, $A_1B_1C_1$ は ABC を平行移動した三角形なので,

$$\overrightarrow{D_1E_1} = a\overrightarrow{CB} = a\overrightarrow{C_1B_1}$$

すると, $A_1E_1D_1$ と $A_1B_1C_1$ は相似になり, その相似比は $a : 1$ である。

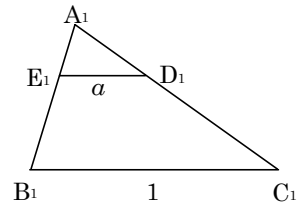
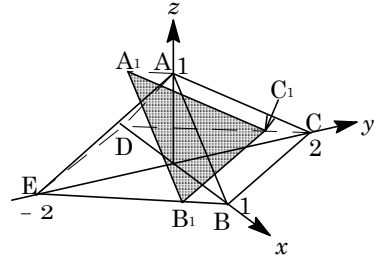
よって, 四角形 $B_1C_1D_1E_1$ の面積は, (1) より,

$$(1-a^2) \times \text{面積}(\triangle A_1B_1C_1) = \frac{3}{2}(1-a^2)$$

また, $\overrightarrow{OB_1} = (1-a)\overrightarrow{OB} + a\overrightarrow{OE} = (1-a, -2a, 0)$

$$\overrightarrow{OD_1} = (1-a)\overrightarrow{OA} + a\overrightarrow{OD} = (-a, 0, 1-a)$$

これより, $|\overrightarrow{B_1D_1}| = \sqrt{(-1)^2 + (2a)^2 + (1-a)^2} = \sqrt{5a^2 - 2a + 2}$



[解 説]

問題文に図はあるものの, 多量の文字が設定され, 煩雑そのものです。勘に頼らず,
 10 分程度で完答するのは至難の業です。