

第 1 問

解答解説のページへ

[1] $x \geq 2, y \geq 2, 8 \leq xy \leq 16$ のとき, $z = \log_2 \sqrt{x} + \log_2 y$ の最大値を求めよう。

$s = \log_2 x, t = \log_2 y$ とおくと, $s, t, s+t$ のとり得る値の範囲はそれぞれ

$$s \in \boxed{\text{ア}}, t \in \boxed{\text{ア}}, \boxed{\text{イ}} \quad s+t \in \boxed{\text{ウ}}$$

となる。また

$$z = \frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}} s+t$$

が成り立つから, z は $s = \boxed{\text{カ}}, t = \boxed{\text{キ}}$ のとき最大値 $\frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ をとる。したが

って, z は $x = \boxed{\text{コ}}, y = \boxed{\text{サ}}$ のとき最大値 $\frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ をとる。

[2] $0 < \theta < 2\pi$ の範囲で, $5 \sin \theta - 3 \cos 2\theta = 3 \dots\dots (*)$ を満たす θ について考えよう。

方程式 $(*)$ を $\sin \theta$ を用いて表すと

$$\boxed{\text{シ}} \sin^2 \theta + 5 \sin \theta - \boxed{\text{ス}} = 0$$

となる。したがって, $-1 \leq \sin \theta \leq 1$ より $\sin \theta = \frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}$ であり, $0 < \theta < 2\pi$ の範

囲でこの等式を満たす θ のうち, 小さい方を θ_1 , 大きい方を θ_2 とすると,

$$\cos \theta_1 = \frac{\sqrt{\boxed{\text{タ}}}}{\boxed{\text{ソ}}}, \quad \cos \theta_2 = \frac{\boxed{\text{チ}} \sqrt{\boxed{\text{タ}}}}{\boxed{\text{ソ}}}$$

である。

θ_1 について不等式 $\boxed{\text{ツ}}$ が成り立つ。 $\boxed{\text{ツ}}$ に当てはまるものを, 次の 0 ~ 5 のうちから 1 つ選べ。

- | | | | | | |
|---|--|---|---|---|--|
| 0 | $0 < \theta_1 < \frac{\pi}{12}$ | 1 | $\frac{\pi}{12} < \theta_1 < \frac{\pi}{6}$ | 2 | $\frac{\pi}{6} < \theta_1 < \frac{\pi}{5}$ |
| 3 | $\frac{\pi}{5} < \theta_1 < \frac{\pi}{4}$ | 4 | $\frac{\pi}{4} < \theta_1 < \frac{\pi}{3}$ | 5 | $\frac{\pi}{3} < \theta_1 < \frac{\pi}{2}$ |

ただし, 必要ならば, 次の値

$$\cos \frac{\pi}{5} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}, \quad \cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

を用いてもよい。

さらに, 不等式 $n\theta_1 > \theta_2$ を満たす自然数 n のうち最小なものは $\boxed{\text{テ}}$ である。

第 2 問

解答解説のページへ

放物線 $y = 2x^2$ を C , 点 $(1, -2)$ を A とする。

点 $Q(u, v)$ に関して, 点 A と対称な点を $P(x, y)$ とすると,

$$u = \frac{x + \boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}, \quad v = \frac{y - \boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$$

が成り立つ。 Q が C 上を動くときの点 P の軌跡を D とすると, D は放物線

$$y = x^2 + \boxed{\text{オ}}x + \boxed{\text{カ}}$$

である。

2 つの放物線 C と D の交点を R と S とする。ただし, x 座標の小さい方を R とする。点 R, S の x 座標はそれぞれ $\boxed{\text{キク}}$, $\boxed{\text{ケ}}$ で, 点 R, S における放物線 D の接線の方程式はそれぞれ

$$y = \boxed{\text{コ}}, \quad y = \boxed{\text{サ}}x - \boxed{\text{シ}}$$

である。

P を放物線 D 上の点とし, P の x 座標を a とおく。 P から x 軸に引いた垂線と放物線 C との交点を H とする。 $\boxed{\text{キク}} < a < \boxed{\text{ケ}}$ のとき, 三角形 PHR の面積 $S(a)$ は

$$S(a) = \frac{1}{\boxed{\text{ス}}} \left(\boxed{\text{セ}}a^3 + a^2 + \boxed{\text{ソ}}a + \boxed{\text{タ}} \right)$$

と表される。 $S(a)$ は $a = \frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}$ のとき, 最大値をとる。

$a = \frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}$ のとき, 直線 HR と放物線 D の交点のうち, R と異なる点の x 座標は

$\frac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}$ である。このとき, $\frac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}} < x < \frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}$ の範囲で, 放物線 D と直線 PH

および直線 HR で囲まれた図形の面積は $\frac{\boxed{\text{ナニ又}}}{\boxed{\text{ネノ}}}$ である。

第 3 問

解答解説のページへ

$\{a_n\}$ を初項 a_1 が 1 で公比が $\frac{1}{3}$ の等比数列とする。数列 $\{a_n\}$ の偶数番目の項を取り

出して、数列 $\{b_n\}$ を $b_n = a_{2n}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) で定める。 $T_n = \sum_{k=1}^n b_k$ とおく。

(1) $\{b_n\}$ も等比数列であり、その初項は $\frac{\text{ア}}{\text{イ}}$ 、公比は $\frac{\text{ウ}}{\text{エ}}$ である。

したがって

$$T_n = \frac{\text{オ}}{\text{カ}} \left(1 - \frac{\text{キ}}{\text{ク}}^n \right)$$

である。また、積 $b_1 b_2 \cdots b_n$ を求めると

$$b_1 b_2 \cdots b_n = \frac{\text{ケ}}{\text{コ}}^{n^2}$$

となる。

(2) 次に、数列 $\{c_n\}$ を $c_n = 2n \cdot b_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) で定め、 $U_n = \sum_{k=1}^n c_k$ とおく。

$$\text{サ} \cdot c_{n+1} - c_n = \text{シ} \cdot b_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

が成り立つから

$$\sum_{k=1}^n (\text{サ} \cdot c_{k+1} - c_k) = \text{シ} \cdot T_n \dots\dots\dots$$

である。またこの左辺の和をまとめ直すと、 U_n 、 c_{n+1} 、 c_1 を用いて

$$\sum_{k=1}^n (\text{サ} \cdot c_{k+1} - c_k) = \text{ス} \cdot U_n + \text{セ} \cdot c_{n+1} - \text{ソ} \cdot c_1 \dots\dots\dots$$

と表される。

とより

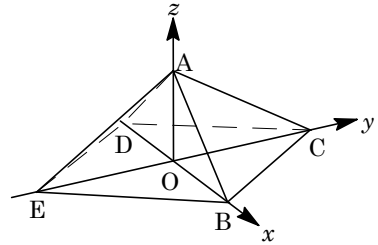
$$U_n = \frac{\text{タチ}}{\text{ツテ}} - \frac{\text{トナ} \cdot n + \text{ニヌ}}{\text{ツテ}} \cdot \frac{1}{\text{ネ}}^n$$

となる。

第 4 問

解答解説のページへ

O を原点とする座標空間における 5 点を $A(0, 0, 1)$, $B(1, 0, 0)$, $C(0, 2, 0)$, $D(-1, 0, 0)$, $E(0, -2, 0)$ とする。ひし形 BCDE を底面とする四角錐 A-BCDE と、平面 ABC に平行な平面との共通部分について考える。



(1) $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} = \boxed{\text{ア}}$ であり、三角形 ABC の面積は $\frac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$ である。

(2) $\vec{u} = \overrightarrow{BA}$, $\vec{v} = \overrightarrow{BE}$ とおく。 $0 < a < 1$ とし、点 B_1 を線分 BE を $a : (1-a)$ に内分する点とすると、 $\overrightarrow{BB_1} = \boxed{\text{エ}} \vec{v}$ である。点 A_1 を $\overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BB_1}$

で定め、線分 A_1B_1 と線分 AE が交わることを示そう。 A_1B_1 上の点 P は、 $0 < b < 1$ を満たす b を用いて

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OB} + b\vec{u} + \boxed{\text{カ}} \vec{v}$$

と表される。また、AE 上の点 Q は、 $0 < c < 1$ を満たす c を用いて

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OA} + \boxed{\text{キ}} \vec{u} + (\boxed{\text{ク}} - c) \vec{v}$$

と表される。

P と Q は $b = \boxed{\text{ケ}} = \boxed{\text{クケ}} + 1$ のとき一致するから、線分 A_1B_1 と AE は、AE を $\boxed{\text{コ}} : (1 - \boxed{\text{コ}})$ に内分する点で交わることがわかる。この点を E_1 とする。

点 C_1 を、 $\overrightarrow{OC_1} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{BB_1}$ で定めると、同様に考えることにより、線分 A_1C_1 と線分 AD も、AD を $\boxed{\text{カ}} : (1 - \boxed{\text{カ}})$ に内分する点で交わることがわかる。この点を D_1 とすると

$$\overrightarrow{D_1E_1} = \boxed{\text{シ}} \overrightarrow{DE}$$

であり、三角形 $A_1B_1C_1$ は三角形 ABC と平行であるから、四角形 $B_1C_1D_1E_1$ の面積は

$$\frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}} (\boxed{\text{ソ}} - \boxed{\text{タ}} \boxed{\text{チ}})$$

である。

また、 $|\overrightarrow{B_1D_1}| = \sqrt{\boxed{\text{ツ}} a^2 - \boxed{\text{テ}} a + \boxed{\text{ト}}}$ である。