# 第１問

問題のページへ

[1]　$A=6x^2+5xy+y^2+2x-y-20$ を因数分解すると,

$$A=6x^2+(5y+2)x+(y+4)(y-5)=(2x+y+4)(3x+y-5)$$

また, $x=-1$ , $y=\dfrac{2}{3-\sqrt{7}}=3+\sqrt{7}$ のとき,

$$A=(5+\sqrt{7})(-5+\sqrt{7})=-18$$

[2]　3つの条件 $p:a^2\geqq 2a+8$ , $q:a\leqq -2$ または $a\geqq 4$ , $r:a\geqq 5$ に対して,

(1)　不等式 $a^2\geqq 2a+8$ の解は, $(a-4)(a+2)\geqq 0$ より, $a\leqq -2$ または $a\geqq 4$

よって, $q$ は $p$ であるための必要十分条件である。

(2)　$\overline{q}:-2<a<4$ , $\overline{r}:a<5$ より,

$q$ かつ $\overline{r}:-2\leqq a$ または $4\leqq a<5$

$q$ または $\overline{r}:a$ はすべての実数

$\overline{q}$ かつ $\overline{r}:-2<a<4$

$\overline{q}$ または $\overline{r}:a<5$

よって, 命題「$p$ ならば($q$ または $\overline{r}$)」は真, 「($q$ かつ $\overline{r}$)ならば $p$」は真である。

## [解 説]

数と式についての基本問題です。[2]の命題も $p$ と $q$ が同値なので, 煩雑ではありません。

## 第２問

問題のページへ

2 次関数 $y=2x^2-4(a+1)x+10a+1$ ……①に対して，

$$y=2\{x-(a+1)\}^2-2(a+1)^2+10a+1=2\{x-(a+1)\}^2-2a^2+6a-1$$

これより，頂点の座標は，$(a+1,\ -2a^2+6a-1)$である。

(1) $x$ 軸と接するのは，$-2a^2+6a-1=0$，$2a^2-6a+1=0$ より，

$$a=\frac{3\pm\sqrt{7}}{2}$$

(2) ①の最小値 $m$ が，$m=-2a^2+6a-1$ となるのは，軸が$-1\leqq x\leqq 3$にある場合より，

$$-1\leqq a+1\leqq 3,\ -2\leqq a\leqq 2$$

また, $a<-2$ のときは，$x=-1$ で最小値をとり，

$$m=2+4(a+1)+10a+1=14a+7$$

さらに, $2<a$ のときは，$x=3$で最小値をとり，

$$m=18-12(a+1)+10a+1=-2a+7$$

以上より，$m=\dfrac{7}{9}$ となるのは, $a$ の値で場合分けをして考えると，

(i) $-2\leqq a\leqq 2$ のとき

$-2a^2+6a-1=\dfrac{7}{9}$ より，$9a^2-27a+8=0$，$(3a-8)(3a-1)=0$ となるので，

$$a=\frac{1}{3}\quad(-2\leqq a\leqq 2)$$

(ii) $a<-2$ のとき

$14a+7=\dfrac{7}{9}$ より，$a=-\dfrac{4}{9}$ となり不適である。

(iii) $2<a$ のとき

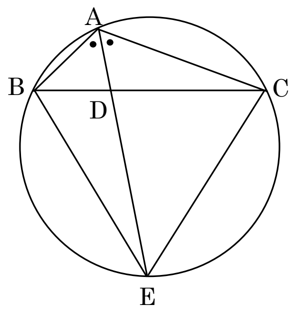
$-2a+7=\dfrac{7}{9}$ より，$a=\dfrac{28}{9}$ となり適する。

### [解 説]

2 次関数の最大・最小についての定型的な問題です。軸の位置によって場合分けをします。

## 第３問

問題のページへ




△ABC に余弦定理を適用すると,

$$\cos\angle CAB=\frac{1^2+2^2-(\sqrt{7})^2}{2\cdot1\cdot2}=-\frac{1}{2}$$

よって，$\angle CAB=120°$

また, AD は∠CABの二等分線より,

$$BD:DC=AB:AC=1:2$$

よって，$BD=\frac{\sqrt{7}}{3}$，$CD=\frac{2\sqrt{7}}{3}$

さて，$\angle DAB=\angle DAC=60°$ より,

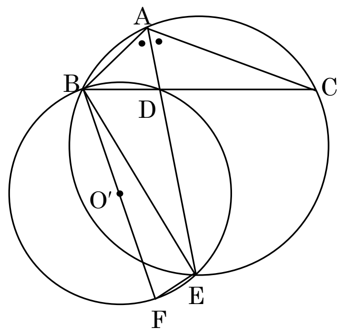
$$\angle DBE=\angle DCE=60°,\ \angle BEC=180°-120°=60°$$

これより，△BCE は正三角形となり，$BE=BC=\sqrt{7}$

また，△BDE に余弦定理を適用して,

$$DE^2=(\sqrt{7})^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^2-2\cdot\sqrt{7}\cdot\frac{\sqrt{7}}{3}\cos60°=\frac{49}{9},\ DE=\frac{7}{3}$$

次に，△BED の外接円の中心を O′ とすると，正弦定理より,




$$\frac{DE}{\sin60°}=2O'B,\ O'B=\frac{\frac{7}{3}}{\sqrt{3}}=\frac{7\sqrt{3}}{9}$$

さらに，BO′ の延長と外接円 $O'$ との交点を F とおくと，$\angle BEF=90°$ であり,

$$EF=\sqrt{BF^2-BE^2}=\sqrt{\frac{14^2\cdot3}{9^2}-7}=\frac{\sqrt{21}}{9}$$

よって，$\tan\angle EBO'=\frac{EF}{BE}=\frac{\sqrt{3}}{9}$

### [解 説]

DE の長さを求めるのに余弦定理を用いましたが，△BDE と△ADC の相似を利用する方法も考えられます。また，予め AD の長さを面積を利用して求めておき，方べきの定理を使うという迂遠な方法もあります。

## 第４問

問題のページへ

(1)　1 の目が出たところで終了する目の出方は,

3+1, 1+2+1, 2+1+1, 1+1+1+1

よって, 4 通りある。

2 の目が出たところで終了する目の出方は,

3+2, 1+2+2, 2+1+2, 1+1+1+2, 2+2, 1+1+2

よって, 6 通りある。

3 の目が出たところで終了する目の出方は,

3+3, 1+2+3, 2+1+3, 1+1+1+3, 2+3, 1+1+3, 1+3

よって, 7 通りある。

4 の目が出たところで終了する目の出方は,

3+4, 1+2+4, 2+1+4, 1+1+1+4, 2+4, 1+1+4, 1+4, 4

よって, 8 通りある。

(2)　(1)と同様に, 5 の目が出たところで終了する目の出方は,

3+5, 1+2+5, 2+1+5, 1+1+1+5, 2+5, 1+1+5, 1+5, 5

また, 6 の目が出たところで終了する目の出方は,

3+6, 1+2+6, 2+1+6, 1+1+1+6, 2+6, 1+1+6, 1+6, 6

さて，これらの結果から，投げる回数が 1 回で終了する確率は$\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$，2 回で終了する確率は$\frac{15}{6^2}=\frac{5}{12}$である。また，終了するまでに投げる回数が最も多いのは 4 回であり，その確率は$\frac{6}{6^4}=\frac{1}{216}$である。

よって，終了するまでに投げる回数の期待値は,

$$1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{5}{12}+3\times\left(1-\frac{1}{2}-\frac{5}{12}-\frac{1}{216}\right)+4\times\frac{1}{216}=\frac{343}{216}$$

### [解 説]

すべての場合を列挙しておくと，ミスが少なくなるというセンター特有の問題です。