第１問

問題のページへ

[1]　$3^{1+\log_{10}x}-5^y=1$ ……(＊)に対して，真数条件より $x>0$ であり，

$$5^y=3\cdot 3^{\log_{10}x}-1$$

ここで，$z=3^{\log_{10}x}$ とおくと，$5^y=3z-1>0$ であるから，$z>\dfrac{1}{3}$ であり，

$$K=\frac{5^y}{3}+3^{-\log_{10}x}=\frac{3z-1}{3}+\frac{1}{z}=z+\frac{1}{z}-\frac{1}{3}$$

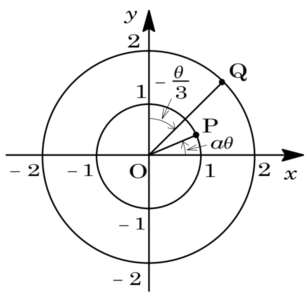
さて，相加平均・相乗平均の関係より，$z+\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{3}\geqq 2\sqrt{z\cdot\dfrac{1}{z}}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{5}{3}$

等号成立は $z=\dfrac{1}{z}$　$(z=1)$ のときであり, K は $z=1$ のとき，最小値 $\dfrac{5}{3}$ をとる。

このとき，$3^{\log_{10}x}=1$ から $x=1$，$5^y=2$ より $y=\log_5 2$ である。

[2]　条件より，$\mathrm{P}(\cos\alpha\theta,\ \sin\alpha\theta)$，$\mathrm{Q}\left(2\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\theta}{3}\right),\ 2\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\theta}{3}\right)\right)$

(1)　$\theta=\pi$ のとき，$\mathrm{Q}\left(2\cos\dfrac{\pi}{6},\ 2\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$ より，$\mathrm{Q}(\sqrt{3},\ 1)$



(2)　3 点 O, P, Q がこの順に一直線上にある最小の $\theta\geqq 0$ の条件は,

$$\alpha\theta=\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{3},\ \ \theta=\frac{3}{6\alpha+2}\pi$$

$0\leqq\theta\leqq\dfrac{3}{6\alpha+2}\pi$ のとき，$\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{6\alpha+2}\leqq\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\theta}{3}\leqq\dfrac{\pi}{2}$ より，円 C_2 において点 Q の軌跡を弧とする扇形の中心角は $\dfrac{\pi}{6\alpha+2}$ なので，その面積は,

$$\frac{1}{2}\cdot 2^2\cdot\frac{\pi}{6\alpha+2}=\frac{1}{3\alpha+1}\pi$$

(3)　
$$\begin{aligned}\mathrm{PQ}^2&=\left\{\cos\alpha\theta-2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{3}\right)\right\}^2+\left\{\sin\alpha\theta-2\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{3}\right)\right\}^2\\&=1+4-4\left\{\cos\alpha\theta\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{3}\right)+\sin\alpha\theta\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{3}\right)\right\}\\&=5-4\cos\left(\alpha\theta-\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{3}\right)=5-4\sin\left(\alpha\theta+\frac{\theta}{3}\right)=5-4\sin\frac{3\alpha+1}{3}\theta\end{aligned}$$

(4)　$f(x)=5-4\sin\dfrac{3\alpha+1}{3}x$ とおくと，正の周期のうち最小のものが 4π より,

$$\frac{2\pi}{\frac{3\alpha+1}{3}}=4\pi,\ \ \frac{2(3\alpha+1)}{3}=1,\ \ \alpha=\frac{1}{6}$$

[解 説]

[2]で, 3 点 O, P, Q が一直線上にある条件は, P, Q の動きを考えて立式しています。

第２問

問題のページへ

(1)　$C_1: y=\frac{1}{8}x^2$ ……①，$C_2: y=-x^2+3ax-2a^2$ ……②に対して，その共有点は，

$$\frac{1}{8}x^2=-x^2+3ax-2a^2,\quad 9x^2-24ax+16a^2=0$$

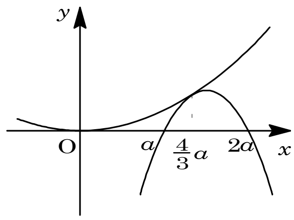
よって，$(3x-4a)^2=0$ から $x=\frac{4}{3}a$

また，$y=\frac{1}{8}\cdot\frac{16}{9}a^2=\frac{2}{9}a^2$ となるので，$\mathrm{P}\left(\frac{4}{3}a,\ \frac{2}{9}a^2\right)$である。

①より，$y'=\frac{1}{4}x$ なので, P における C_1 の接線の方程式は,

$$y-\frac{2}{9}a^2=\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{3}a\left(x-\frac{4}{3}a\right),\quad y=\frac{1}{3}ax-\frac{2}{9}a^2$$

(2)　C_1 と x 軸および直線 $x=2$ で囲まれた図形の面積は,



$$\int_0^2\frac{1}{8}x^2dx=\left[\frac{1}{24}x^3\right]_0^2=\frac{1}{3}$$

また，C_2 と x 軸の交点は，$-x^2+3ax-2a^2=0$ より，

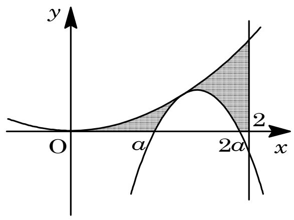
$$x=a,\ 2a$$

すると，C_2 と x 軸に囲まれた図形の面積は,

$$\int_a^{2a}-(x-a)(x-2a)\,dx=\frac{1}{6}a^3$$

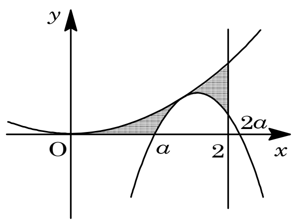
(3)　$0≦x≦2$ の範囲で，C_1，C_2 と 2 直線 $x=0$，$x=2$ で囲まれた図形 R の中で，$y≧0$ を満たす部分の面積 $S(a)$ は,

(i)　$2a≦2$ $(0<a≦1)$ のとき



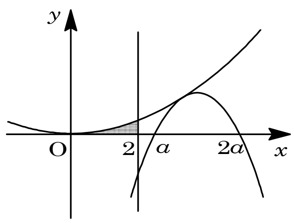
$$S(a)=\int_0^2\frac{1}{8}x^2dx-\int_a^{2a}-(x-a)(x-2a)\,dx$$
$$=-\frac{1}{6}a^3+\frac{1}{3}$$

(ii)　$a≦2<2a$ $(1<a≦2)$ のとき



$$S(a)=\int_0^2\frac{1}{8}x^2dx-\int_a^2-(x^2+3ax-2a^2)\,dx$$
$$=\frac{1}{3}+\left[\frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}ax^2+2a^2x\right]_a^2$$
$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}(8-a^3)-\frac{3}{2}a(4-a^2)+2a^2(2-a)$$
$$=-\frac{5}{6}a^3+4a^2-6a+3$$

(iii) $2<a$ のとき



$$S(a)=\int_0^2\frac{1}{8}x^2dx=\frac{1}{3}$$

さて，$S(a)$ は $a>0$ において連続的に変化し，$0<a≦1$ のとき(i)より単調減少, $2<a$ のとき(iii)より定数値である。

そこで, (ii)より，$1 < a \leqq 2$ において,

$$S'(a) = -\frac{5}{2}a^2 + 8a - 6$$
$$= -\frac{1}{2}(5a-6)(a-2)$$

すると，$S(a)$ の増減は右表のようになる。

a	1	$\cdots$	$\frac{6}{5}$	$\cdots$	2
$S'(a)$		$-$	0	$+$	
$S(a)$		$\searrow$	$\frac{3}{25}$	$\nearrow$	

以上より，$S(a)$ は $a = \frac{6}{5}$ のとき最小値 $\frac{3}{25}$ をとる。

[解 説]

微積分の総合問題です。上の解では細かい部分は省いていますが，後半，計算量がかなり増加します。

第３問

問題のページへ

(1)　数列$\{a_n\}$は初項が 7，公差が-4の等差数列より，

$$a_n = 7-4(n-1) = -4n+11$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{1}{2}(7-4n+11)n = -2n^2+9n$$

(2)　$b_n = pn^2-qn-r$ とするとき，$b_{n+1}-2b_n = -2n^2+9n$ ……①であり，

$$b_{n+1}-2b_n = p(n+1)^2-q(n+1)-r-2(pn^2-qn-r)$$

$$= -pn^2+(2p+q)n+p-q+r$$

①より，$-pn^2+(2p+q)n+p-q+r = -2n^2+9n$ となり，

$$-p=-2,\ 2p+q=9,\ p-q+r=0$$

よって，$p=2$，$q=5$，$r=3$ から，$b_n = 2n^2-5n-3$

すると，$b_1 = 2-5-3 = -6$ となる。

さらに，$c_1=1$，$c_{n+1}-2c_n = -2n^2+9n$ ………②

②－①より，$d_n = c_n - b_n$ とおくと，$d_{n+1}-2d_n = 0$ となり，

$$d_n = d_1\cdot 2^{n-1} = (1+6)\cdot 2^{n-1} = 7\cdot 2^{n-1}$$

よって，$c_n = d_n + b_n = 7\cdot 2^{n-1}+2n^2-5n-3$ となり，

$$\sum_{k=1}^{n} c_k = 7\cdot\frac{2^n-1}{2-1}+2\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-5\cdot\frac{1}{2}n(n+1)-3n$$

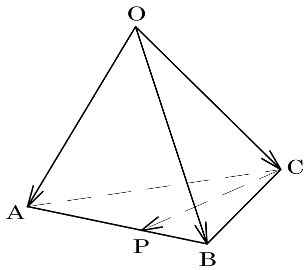
$$= 7\cdot 2^n+\frac{2}{3}n^3-\frac{3}{2}n^2-\frac{31}{6}n-7$$

[解 説]

(2)では，漸化式②を解くのに，特殊解b_nを求め，これを利用して一般解c_nを求めるという誘導がついています。この方法については，このサイト内の「ピンポイントレクチャー」を参照ください。

第４問

問題のページへ



(1)　$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{BC}=\sqrt{2}$，$\mathrm{OC}=\mathrm{CA}=\mathrm{AB}=\sqrt{3}$ であり，

$$|\vec{a}|=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=\sqrt{2}\,,\ |\vec{b}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=\sqrt{2}$$

$$|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{BA}}|^2=3$$

また，$|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=4-2\vec{a}\cdot\vec{b}$ から，

$$4-2\vec{a}\cdot\vec{b}=3,\ \vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{2}$$

さらに，$|\vec{c}|=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=\sqrt{3}$，$|\vec{b}-\vec{c}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{CB}}|^2=2$，$|\vec{c}-\vec{a}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2=3$ なので，同様にすると，

$$2=2-2\vec{b}\cdot\vec{c}+3,\ 3=2-2\vec{c}\cdot\vec{a}+3$$

よって，$\vec{b}\cdot\vec{c}=\dfrac{3}{2}$，$\vec{c}\cdot\vec{a}=1$ である。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}$ とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{CP}}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}-\vec{c}$

$\overrightarrow{\mathrm{CP}}\cdot\vec{a}=0$……①より，$(1-t)|\vec{a}|^2+t\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{c}\cdot\vec{a}=0$ となり，

$$2(1-t)+\frac{1}{2}t-1=0,\ t=\frac{2}{3}$$

これより，$\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{2}{3}\vec{b}-\vec{c}$ となり，P は AB を $2:1=1:\dfrac{1}{2}$ に内分する。

また，$\overrightarrow{\mathrm{CP}}\cdot\vec{b}=\dfrac{1}{3}\vec{a}\cdot\vec{b}+\dfrac{2}{3}|\vec{b}|^2-\vec{c}\cdot\vec{b}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{3}\cdot2-\dfrac{3}{2}=0$……②であり，

$$|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|^2=\frac{1}{9}|\vec{a}|^2+\frac{4}{9}|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+\frac{4}{9}\vec{a}\cdot\vec{b}-\frac{4}{3}\vec{b}\cdot\vec{c}-\frac{2}{3}\vec{c}\cdot\vec{a}=\frac{5}{3}$$

よって，$|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|=\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{15}}{3}$ である。

①②より，$\overrightarrow{\mathrm{CP}}$ は△OAB の各辺と垂直であるから，直線 CP は△OAB を含む平面に垂直であり，また，

$$\triangle\mathrm{OAB}=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{15}{4}}=\frac{\sqrt{15}}{4}$$

以上より，四面体 OABC の体積 V は，

$$V=\frac{1}{3}\cdot(\triangle\mathrm{OAB})\cdot|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{15}}{4}\cdot\frac{\sqrt{15}}{3}=\frac{5}{12}$$

[解 説]

丁寧な誘導がついています。内容は，四面体の体積を求める有名問題です。