第１問

解答解説のページへ

[1]　実数 x, y は，$3^{1+\log_{10} x} - 5^y = 1$ ……(＊)を満たしている。このとき

$$K = \frac{5^y}{3} + 3^{-\log_{10} x}$$

の最小値を求めよう。

真数条件により $x >$ $\boxed{\text{ア}}$ である。ただし，対数 $\log_a b$ に対し，a を底といい，b を真数という。次に，(＊)より，$5^y = \boxed{\text{イ}} \cdot 3^{\log_{10} x} - 1$ である。$z = 3^{\log_{10} x}$ とおくと，$5^y > 0$ であるから，z のとり得る値の範囲は，$z > \dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$ となる。さらに，

$$K = z + \frac{\boxed{\text{オ}}}{z} - \frac{1}{\boxed{\text{カ}}}$$

となるから，K は $z = \boxed{\text{キ}}$ のとき最小値 $\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ をとる。このとき，

$x = \boxed{\text{コ}}$，$y = \log_{\boxed{\text{サ}}} \boxed{\text{シ}}$ である。

[2]　a を正の定数とする。点 O を原点とする座標平面において，中心が O で，半径が 1 の円と半径が 2 の円をそれぞれ C_1，C_2 とする。$\theta \geqq 0$ を満たす実数 θ に対して，角 $a\theta$ の動径と C_1 の交点を P とし，角 $\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\theta}{3}$ の動径と C_2 の交点を Q とする。ここで，動径は O を中心とし，その始線は x 軸の正の部分とする。

(1)　$\theta = \pi$ のとき，Q の座標は $\left(\sqrt{\boxed{\text{ス}}},\ \boxed{\text{セ}}\right)$ である。

(2)　3 点 O, P, Q がこの順に一直線上にあるような最小の θ の値は，

$$\frac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}\,a + \boxed{\text{チ}}}\pi$$

である。θ が，$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}\,a + \boxed{\text{チ}}}\pi$ の範囲を動くとき，円 C_2 において点 Q の軌跡を弧とする扇形の面積は $\dfrac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}\,a + \boxed{\text{ト}}}\pi$ である。

(3)　線分 PQ の長さの 2 乗 PQ^2 は

$$\boxed{\text{ナ}} - \boxed{\text{ニ}}\sin\left(\frac{\boxed{\text{ヌ}}\,a + \boxed{\text{ネ}}}{\boxed{\text{ノ}}}\theta\right)$$

である。

(4)　x の関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \boxed{\text{ナ}} - \boxed{\text{ニ}}\sin\left(\frac{\boxed{\text{ヌ}}\,a + \boxed{\text{ネ}}}{\boxed{\text{ノ}}}\,x\right)$$

とおき，$f(x)$ の正の周期のうち最小のものが 4π であるとすると，$a = \dfrac{\boxed{\text{ハ}}}{\boxed{\text{ヒ}}}$ である。

第2問

解答解説のページへ

a を正の実数とし, x の 2 次関数 $f(x)$ と $g(x)$ を

$$f(x)=\frac{1}{8}x^2,\quad g(x)=-x^2+3ax-2a^2$$

とする。また，放物線 $y=f(x)$ および $y=g(x)$ をそれぞれ C_1，C_2 とする。

(1)　C_1 と C_2 の共有点を P とすると，点 P の座標は $\left(\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}a,\ \dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}a^2\right)$ である。また，点 P における C_1 の接線の方程式は,

$$y=\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}ax-\frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}a^2$$

である。

(2)　C_1 と x 軸および直線 $x=2$ で囲まれた図形の面積は $\dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$ である。また，C_2 と x 軸の交点の x 座標は $\boxed{\text{サ}}$, $\boxed{\text{シス}}$ であり，C_2 と x 軸に囲まれた図形の面積は $\dfrac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}a^3$ である。

(3)　$0\leqq x\leqq 2$ の範囲で，2 つの放物線 C_1，C_2 と 2 直線 $x=0$，$x=2$ で囲まれた図形を R とする。R の中で, $y\geqq 0$ を満たすすべての部分の面積 $S(a)$ は

$0<a\leqq\boxed{\text{タ}}$ のとき　$S(a)=-\dfrac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}a^3+\dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$

$\boxed{\text{タ}}<a\leqq\boxed{\text{チ}}$ のとき　$S(a)=-\dfrac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}}a^3+\boxed{\text{ト}}a^2-\boxed{\text{ナ}}a+\boxed{\text{ニ}}$

$\boxed{\text{チ}}<a$ のとき　$S(a)=\dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$

である。したがって，a が $a>0$ の範囲を動くとき，$S(a)$ は $a=\dfrac{\boxed{\text{ヌ}}}{\boxed{\text{ネ}}}$ で最小値 $\dfrac{\boxed{\text{ノ}}}{\boxed{\text{ハヒ}}}$ をとる。

第３問

解答解説のページへ

(1) 数列$\{a_n\}$は初項が 7，公差が-4の等差数列とする。数列$\{a_n\}$の一般項は

$$a_n = \boxed{\text{アイ}}\,n + \boxed{\text{ウエ}}$$

であり，初項から第 n 項までの和は

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \boxed{\text{オカ}}\,n^2 + \boxed{\text{キ}}\,n$$

である。

(2) 数列$\{b_n\}$は，第 n 項が$b_n = pn^2 - qn - r$という 2 次式で表され，

$$b_{n+1} - 2b_n = \boxed{\text{オカ}}\,n^2 + \boxed{\text{キ}}\,n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \cdots\cdots\cdots ①$$

を満たすとする。このとき，

$$p = \boxed{\text{ク}},\quad q = \boxed{\text{ケ}},\quad r = \boxed{\text{コ}}$$

であり，$b_1 = \boxed{\text{サシ}}$である。

さらに，次の条件によって定まる数列$\{c_n\}$を考えよう。

$$c_1 = 1,\quad c_{n+1} - 2c_n = \boxed{\text{オカ}}\,n^2 + \boxed{\text{キ}}\,n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \cdots\cdots\cdots ②$$

①と②より，$d_n = c_n - b_n$とおくと，

$$d_{n+1} - \boxed{\text{ス}}\,d_n = 0 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

が成り立つ。これより，数列$\{c_n\}$の一般項は

$$c_n = \boxed{\text{セ}} \cdot \boxed{\text{ソ}}^{\,n-1} + \boxed{\text{ク}}\,n^2 - \boxed{\text{ケ}}\,n - \boxed{\text{コ}}$$

である。数列$\{c_n\}$の初項から第 n 項までの和$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} c_k$は

$$\boxed{\text{タ}} \cdot \boxed{\text{チ}}^{\,n} + \frac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}}\,n^3 - \frac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}}\,n^2 - \frac{\boxed{\text{ニヌ}}}{\boxed{\text{ネ}}}\,n - \boxed{\text{ノ}}$$

となる。

第４問

解答解説のページへ

四面体 OABC において，$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{BC}=\sqrt{2}$，$\mathrm{OC}=\mathrm{CA}=\mathrm{AB}=\sqrt{3}$ である。$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおく。

(1)　$|\vec{a}-\vec{b}|^2=\boxed{\text{ア}}$であり，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$ である。

また，$\vec{b}\cdot\vec{c}=\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}$，$\vec{c}\cdot\vec{a}=\boxed{\text{カ}}$である。

(2)　直線 AB 上の点 P を $\overrightarrow{\mathrm{CP}}\cdot\vec{a}=0$ であるようにとると

$$\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}\vec{a}+\frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}\vec{b}-\vec{c}$$

となり，点 P は AB を $1:\dfrac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}$ に内分する。また，$\overrightarrow{\mathrm{CP}}\cdot\vec{b}=\boxed{\text{ス}}$であり，

$|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|=\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{セソ}}}}{\boxed{\text{タ}}}$ である。

$\overrightarrow{\mathrm{CP}}$ は三角形$\boxed{\text{チ}}$の各辺と垂直であるから，直線 CP は三角形$\boxed{\text{チ}}$を含む平面に垂直である。ただし，$\boxed{\text{チ}}$については，当てはまるものを，次の⓪～③のうちから１つ選べ。

⓪　ABC　　①　OBC　　②　OAC　　③　OAB

三角形$\boxed{\text{チ}}$の面積は $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ツテ}}}}{\boxed{\text{ト}}}$ であるから，四面体 OABC の体積は $\dfrac{\boxed{\text{ナ}}}{\boxed{\text{ニヌ}}}$ である。