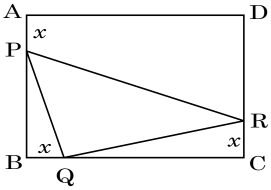
第１問

問題のページへ



[1]　まず, (台形 PBCR)$=\frac{1}{2}(x+8-x)\times 12=48$

△PQR＝(台形PBCR)－△PBQ－△QCR より,

$$S=48-\frac{1}{2}(8-x)x-\frac{1}{2}(12-x)x=x^2-10x+48$$

$S<24$ とすると, $x^2-10x+24<0$ となり,

$$(x-4)(x-6)<0\ ,\ 4<x<6$$

[2]　条件 p「$m+n$ は 2 で割り切れる」$\rightleftarrows$「m と n の偶奇が一致する」

条件 q「n は 4 で割り切れる」

条件 r「m は 2 で割り切れ, かつ n は 4 で割り切れる」

まず, 命題 $r \to p$ は明らかに成立し, 逆の命題 $p \to r$ は成立しない。反例として $m=n=1$ があげられる。

p は r であるための必要条件であるが十分条件でない

対偶を考えると,

$\overline{p}$ は $\overline{r}$ であるための十分条件であるが必要条件でない

次に,「p かつ q」は「$m+n$ は 2 で割り切れ, かつ n は 4 で割り切れる」となり, 命題 $r \to$「p かつ q」は明らかに成立する。逆の命題「p かつ q」$\to r$ に対しては, $m+n$, n を自然数 k, l で表し,

$$m+n=2k\ ,\ \ n=4l$$

これより, $m=2k-4l=2(k-2l)$ となり,「p かつ q」$\to r$ も成立する。

「p かつ q」は r であるための必要十分条件である

さらに,「p または q」$\leftarrow$「p かつ q」$\rightleftarrows r$ より,

「p または q」は r であるための必要条件であるが, 十分条件でない

[解 説]

冒頭が文章題となっている点は, 従来と異なりますが, 内容は平易です。

第２問

問題のページへ

2 次関数 $y=ax^2-bx-a+b$ ……①のグラフが，点$(-2,\ 6)$を通ることより，

$$6=4a+2b-a+b,\ b=-a+2$$

このとき，①から，

$$y=ax^2+(a-2)x-2a+2=a\left(x+\frac{a-2}{2a}\right)^2-\frac{(a-2)^2}{4a}-a+2$$

$$=a\left(x+\frac{a-2}{2a}\right)^2-\frac{9a^2-12a+4}{4a}=a\left(x+\frac{a-2}{2a}\right)^2-\frac{(3a-2)^2}{4a}$$

頂点の座標は，$\left(\dfrac{-a+2}{2a},\ \dfrac{-(3a-2)^2}{4a}\right)$となる。

さらに，条件より，$\dfrac{-(3a-2)^2}{4a}=-2$のとき，$(3a-2)^2=8a$から，

$$9a^2-20a+4=0,\ (a-2)(9a-2)=0$$

よって，$a=2,\ \dfrac{2}{9}$である。

ここで，$a=\dfrac{2}{9}$のとき，頂点のx座標は，$\dfrac{-a+2}{2a}=4$より，①は，

$$y=\frac{2}{9}(x-4)^2-2\ \cdots\cdots\cdots ①'$$

①′とx軸との交点は，$\dfrac{2}{9}(x-4)^2-2=0$から，$(x-4)^2=9$となり，

$$x-4=\pm 3,\ x=1,\ 7$$

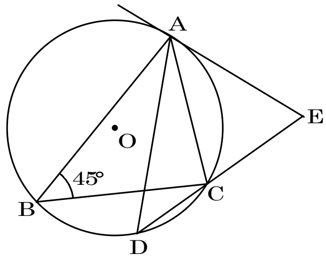
また, 2 次関数①′のグラフの軸が$x=4$であることに注意すると, $0\leqq x\leqq 9$において, ①′は$x=4$のとき最小値-2をとり，$x=9$のとき最大値$\dfrac{32}{9}$をとる。

[解 説]

平方完成にミスがなければ，最後の設問までスムーズに流れます。

第３問

問題のページへ



$\triangle$ABC に余弦定理を適用して，

$$\mathrm{CA}^2=7^2+(4\sqrt{2})^2-2\cdot7\cdot4\sqrt{2}\cos45^\circ=25$$

よって，$\mathrm{CA}=5$ である。

外接円 O の半径 R は，正弦定理より，

$$R=\frac{5}{2\sin45^\circ}=\frac{5}{\sqrt{2}}=\frac{5}{2}\sqrt{2}$$

また，$\angle\mathrm{ADC}=\angle\mathrm{ABC}=45^\circ$ より，$\triangle$ADC に余弦定理を適用して，

$$25=x^2+(\sqrt{10})^2-2x\sqrt{10}\cos45^\circ,\quad x^2-2\sqrt{5}x-15=0$$

$x>0$ より，$x=\sqrt{5}+\sqrt{5+15}=3\sqrt{5}$

さて, AE は外接円 O の接線なので，接弦定理より $\angle\mathrm{CAE}=\angle\mathrm{ADE}=45^\circ$ となり，

$$\triangle\mathrm{ACE}\backsim\triangle\mathrm{DAE}$$

よって，$\dfrac{\mathrm{EA}}{\mathrm{ED}}=\dfrac{\mathrm{EC}}{\mathrm{EA}}=\dfrac{\mathrm{AC}}{\mathrm{DA}}$ となり，$\mathrm{AC}=5$，$\mathrm{DA}=3\sqrt{5}$ から，

$$\mathrm{EA}=\frac{\mathrm{DA}}{\mathrm{AC}}\mathrm{EC}=\frac{3}{5}\sqrt{5}\,\mathrm{EC}\cdots\cdots\cdots①$$

また，$\mathrm{EA}^2=\mathrm{ED}\cdot\mathrm{EC}$ となり，$\mathrm{EA}^2=(\mathrm{EC}+\sqrt{10})\mathrm{EC}\cdots\cdots\cdots②$

①②より，$\mathrm{EA}^2=\left(\dfrac{\sqrt{5}}{3}\mathrm{EA}+\sqrt{10}\right)\cdot\dfrac{\sqrt{5}}{3}\mathrm{EA}$ となり，

$$\frac{4}{9}\mathrm{EA}=\frac{5}{3}\sqrt{2},\quad \mathrm{EA}=\frac{15}{4}\sqrt{2}$$

すると，$\triangle\mathrm{ACE}=\dfrac{1}{2}\cdot5\cdot\dfrac{15}{4}\sqrt{2}\sin45^\circ=\dfrac{75}{8}$

[解 説]

後半が平面図形の分野です。旧課程のような，文字の入る解答を選択肢から選ぶという形式が復活しました。

第４問

問題のページへ

(1)　まず，出た目の数が 1, 2 のとき a，出た目の数が 3，4 のとき b，出た目の数が 5，6 のとき x と表し，3 回投げ終わったときにできる $3^3=27$ 通りの文字の列について列挙すると，右表のようになる。

aaa	AAA	baa	BAA	xaa	AA
aab	AAB	bab	BAB	xab	AB
aax	A	bax	B	xax	なし
aba	ABA	bba	BBA	xba	BA
abb	ABB	bbb	BBB	xbb	BB
abx	A	bbx	B	xbx	なし
axa	A	bxa	A	xxa	A
axb	B	bxb	B	xxb	B
axx	なし	bxx	なし	xxx	なし

さて，文字の列が AAA となるのは，aaa の場合のみより $2^3=8$ 通りであり，文字の列が AB となるのは，xab の場合のみより $2^3=8$ 通りである。

(2)　右表の 27 通りの場合は同様に確からしい。すると，文字の列が A となるのは 5 通りあり，その確率は $\dfrac{5}{27}$ となる。

また，文字の列がなしとなるのは 5 通りあり，その確率は $\dfrac{5}{27}$ である。

(3)　文字の列の字数が 3 となるのは 8 通りあり，その確率は $\dfrac{8}{27}$ であり，また字数が 2 となるのは 4 通りあり，その確率は $\dfrac{4}{27}$ である。

同様に，字数が 1 となる確率は $\dfrac{10}{27}$ であり，これより，文字の列の字数の期待値は，

$$1\times\frac{10}{27}+2\times\frac{4}{27}+3\times\frac{8}{27}=\frac{14}{9}$$

[解 説]

厳しい制限時間の中で，27 通りのすべての場合を書き出すという決断ができるかどうか，これがすべてです。運・不運が，得点に大きく影響します。