第１問

問題のページへ

[1]　$\sin 2x > \sqrt{2}\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)+\dfrac{1}{2}$ に対して，

$$2\sin x\cos x > \sqrt{2}\left(\cos x\cos\frac{\pi}{4}-\sin x\sin\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2}$$

$$4\sin x\cos x > 2\cos x - 2\sin x + 1$$

ここで，$a=\sin x$，$b=\cos x$ とおくと，$4ab > 2b-2a+1$，$4ab+2a-2b-1>0$

すると，$(2a-1)(2b+1)>0$ となり，$2a-1$ と $2b+1$ の符号で場合分けをする。

(i)　$2a-1>0$ かつ $2b+1>0$ のとき

$\sin x > \dfrac{1}{2}$ かつ $\cos x > -\dfrac{1}{2}$ より，$\dfrac{\pi}{6} < x < \dfrac{2}{3}\pi$

(ii)　$2a-1<0$ かつ $2b+1<0$ のとき

$\sin x < \dfrac{1}{2}$ かつ $\cos x < -\dfrac{1}{2}$ より，$\dfrac{5}{6}\pi < x < \dfrac{4}{3}\pi$

[2]　$2+\log_{\sqrt{y}}3 < \log_y 81 + 2\log_y\left(1-\dfrac{x}{2}\right)$……①に対して，底の条件から，

$\sqrt{y}>0$ かつ $\sqrt{y}\neq 1$，$y>0$ かつ $y\neq 1$

まとめると，$y>0$ かつ $y\neq 1$ となり，また真数条件より，$1-\dfrac{x}{2}>0$ から，$x<2$

さて，$\log_{\sqrt{y}}3 = \dfrac{\log_3 3}{\log_3\sqrt{y}} = \dfrac{2}{\log_3 y}$，$\log_y 81 = \dfrac{\log_3 81}{\log_3 y} = \dfrac{4}{\log_3 y}$ から，①は，

$$2+\frac{2}{\log_3 y} < \frac{4}{\log_3 y} + \frac{2\log_3\left(1-\frac{x}{2}\right)}{\log_3 y},\quad 1 < \frac{1}{\log_3 y} + \frac{\log_3\left(1-\frac{x}{2}\right)}{\log_3 y}$$

すると, $y>1$ のとき，$\log_3 y>0$ より，

$$\log_3 y < 1+\log_3\left(1-\frac{x}{2}\right),\quad \log_3 y < \log_3 3\left(1-\frac{x}{2}\right)\text{……②}$$

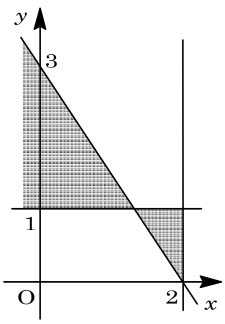
また, $0<y<1$ のとき，$\log_3 y<0$ より，

$$\log_3 y > 1+\log_3\left(1-\frac{x}{2}\right),\quad \log_3 y > \log_3 3\left(1-\frac{x}{2}\right)\text{……③}$$

②より，$y<3\left(1-\dfrac{x}{2}\right)$　$(y>1)$

③より，$y>3\left(1-\dfrac{x}{2}\right)$　$(0<y<1)$

すると，求める領域は右図の網点部となる。ただし，境界は含まない。



[解 説]

三角関数と対数関数，どちらも不等式を解く問題です。解に至る道筋が明快に示されています。

第２問

問題のページへ

(1)　$f(x)=x^3-x$，$g(x)=(x-a)^3-(x-a)+2a=x^3-3ax^2+(3a^2-1)x-a^3+3a$

$$g(x)-f(x)=-3ax^2+3a^2x-a^3+3a=a(-3x^2+3ax-a^2+3)\cdots\cdots\cdots(*)$$

$g(x)-f(x)=0$が異なる２つの実数解をもつ条件は,

$$D=9a^2-4\cdot3(a^2-3)>0,\ a^2-12<0$$

$a>0$から，$0<a<2\sqrt{3}$となる。

また,(＊)より，$g(x)-f(x)=a\left\{-3\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}a^2+3\right\}$

よって，$g(x)-f(x)$は$x=\dfrac{a}{2}$のとき最大となり，最大値は,

$$a\left(-\frac{1}{4}a^2+3\right)=\frac{a}{4}(12-a^2)$$

(2)　$h(a)=\dfrac{a}{4}(12-a^2)=-\dfrac{1}{4}a^3+3a$ より,

$$h'(a)=-\frac{3}{4}a^2+3=-\frac{3}{4}(a+2)(a-2)$$

a	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$h'(a)$		＋	0	－
$h(a)$		↗	4	↘

よって，$a=2$のとき最大値４をとる。

(3)　$a=\sqrt{3}$ のとき，$g(x)-f(x)=\sqrt{3}(-3x^2+3\sqrt{3}x)=-3\sqrt{3}x(x-\sqrt{3})$

すると，$g(x)-f(x)=0$ の解は$x=0$, $\sqrt{3}$ となり，$f(0)=0$，$f(\sqrt{3})=2\sqrt{3}$ から，曲線$y=f(x)$と曲線$y=g(x)$の２つの交点P, Q の座標は,

$$\mathrm{P}(0,\ 0),\ \mathrm{Q}(\sqrt{3},\ 2\sqrt{3})$$

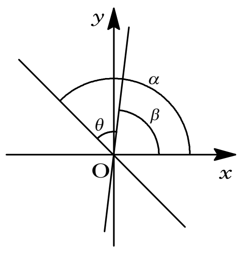
よって,２つの曲線$y=f(x)$，$y=g(x)$で囲まれた部分の面積Sは,

$$S=\int_0^{\sqrt{3}}-3\sqrt{3}x(x-\sqrt{3})\,dx=-3\sqrt{3}\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)\cdot(\sqrt{3})^3=\frac{9}{2}$$

このとき，$g(x)=x^3-3\sqrt{3}x^2+8x$となり,

$$f'(x)=3x^2-1,\ g'(x)=3x^2-6\sqrt{3}x+8$$

x 軸の正の部分と，P における曲線$y=f(x)$の接線, $y=g(x)$の接線とのなす角をそれぞれα，βとおくと,



$$\tan\alpha=f'(0)=-1,\ \tan\beta=g'(0)=8$$

したがって,２本の接線のなす角をθとすると,

$$\tan\theta=\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{-1-8}{1-8}=\frac{9}{7}$$

[解 説]

微積分についての幅広い知識が問われています。ただ，計算は難しくないものの, 量的には多めです。

第３問

問題のページへ

(1) $a_1=-27$, $a_{n+1}=3a_n+60$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ より,

$$a_{n+1}+30=3(a_n+30)$$

よって，$a_n+30=(a_1+30)\cdot 3^{n-1}=3^n$ より，$a_n=3^n-30$ ………①

初項から第 n 項までの和 S_n は,

$$S_n=\frac{3(3^n-1)}{3-1}-30n=\frac{3}{2}(3^n-1)-30n$$

$S_n>0$ とすると，$\frac{3}{2}(3^n-1)>30n$ から，$3^n>20n+1$

この不等式を満たす最小の自然数 n は，$n=5$ である。

(2) 条件より，$2b_n+c_n=d(n-1)$ ……②，$b_n-2c_n=xr^{n-1}$ ……③

②③より，$5b_n=2d(n-1)+xr^{n-1}$，$5c_n=d(n-1)-2xr^{n-1}$

$$5b_n+5c_n=3d(n-1)-xr^{n-1}$$

よって，$b_n+c_n=\frac{3}{5}d(n-1)-\frac{1}{5}xr^{n-1}$

(3) 数列$\{b_n+c_n\}$の階差数列は，数列$\{a_n\}$であるので,

$$a_n=(b_{n+1}+c_{n+1})-(b_n+c_n)=\frac{3}{5}dn-\frac{1}{5}xr^n-\frac{3}{5}d(n-1)+\frac{1}{5}xr^{n-1}$$

$$=\frac{3}{5}d+\frac{1}{5}x(1-r)r^{n-1}\ \cdots\cdots\cdots④$$

①④より，$\frac{3}{5}d=-30$，$\frac{1}{5}x(1-r)=3$，$r=3$ から，$d=-50$，$x=-\frac{15}{2}$

このとき，$b_n=\frac{1}{5}\left\{-100(n-1)-\frac{15}{2}\cdot 3^{n-1}\right\}=-\frac{3^n}{2}-20(n-1)$

$$c_n=\frac{1}{5}\left\{-50(n-1)-2\left(-\frac{15}{2}\right)\cdot 3^{n-1}\right\}=3^n-10(n-1)$$

[解 説]

線形タイプの 2 項間型漸化式が，ノーヒントで出題されました。なお，(1)の不等式は，$n=1$, 2, … と n の値を代入して解いています。ところで，④式が問題文で与えられている理由は何でしょうか。

第４問

問題のページへ

(1) 点 E は線分 AB を $a:(1-a)$ に内分することより,

$$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=(1-a)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+a\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(1-a)(1,\ 0,\ 0)+a(0,\ 1,\ 1)=(1-a,\ a,\ a)$$

点 F は線分 CD を $a:(1-a)$ に内分することより,

$$\overrightarrow{\mathrm{OF}}=(1-a)\overrightarrow{\mathrm{OC}}+a\overrightarrow{\mathrm{OD}}=(1-a)(1,\ 0,\ 1)+a(-2,\ -1,\ -2)$$
$$=(1-3a,\ -a,\ 1-3a)$$

よって, $\overrightarrow{\mathrm{EF}}=(1-3a,\ -a,\ 1-3a)-(1-a,\ a,\ a)=(-2a,\ -2a,\ 1-4a)$

また, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-1,\ 1,\ 1)$ であり, $\overrightarrow{\mathrm{EF}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ から $\overrightarrow{\mathrm{EF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$ となり,

$$2a-2a+1-4a=0,\quad a=\frac{1}{4}$$

(2) $a=\dfrac{1}{4}$ のとき, $\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\left(\dfrac{3}{4},\ \dfrac{1}{4},\ \dfrac{1}{4}\right)$, $\overrightarrow{\mathrm{OF}}=\left(\dfrac{1}{4},\ -\dfrac{1}{4},\ \dfrac{1}{4}\right)$

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=(1-b)\overrightarrow{\mathrm{OE}}+b\overrightarrow{\mathrm{OF}}=(1-b)\left(\frac{3}{4},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{4}\right)+b\left(\frac{1}{4},\ -\frac{1}{4},\ \frac{1}{4}\right)$$
$$=\left(\frac{3-2b}{4},\ \frac{1-2b}{4},\ \frac{1}{4}\right)$$

(3) 条件より, $\overrightarrow{\mathrm{BH}}=s\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ なので,

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+s\overrightarrow{\mathrm{BC}}=(0,\ 1,\ 1)+s(1,\ -1,\ 0)=(s,\ 1-s,\ 1)\cdots\cdots\cdots①$$

また, $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=t\overrightarrow{\mathrm{OG}}=t\left(\dfrac{3-2b}{4},\ \dfrac{1-2b}{4},\ \dfrac{1}{4}\right)\cdots\cdots\cdots②$

①②より, $s=\dfrac{3-2b}{4}t\cdots\cdots③$, $1-s=\dfrac{1-2b}{4}t\cdots\cdots④$, $1=\dfrac{1}{4}t\cdots\cdots⑤$

⑤より $t=4$ となり, ③④に代入すると,

$$s=3-2b,\quad 1-s=1-2b$$

よって, $b=\dfrac{3}{4}$, $s=\dfrac{3}{2}$ となり, 点 H の座標は, $\mathrm{H}\left(\dfrac{3}{2},\ -\dfrac{1}{2},\ 1\right)$ である。

このとき, $\overrightarrow{\mathrm{BH}}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ なので, 点 H は線分 BC を $\dfrac{3}{2}:\dfrac{1}{2}=3:1$ に外分する。

[解 説]

空間ベクトルの成分に関する基本問題です。ベクトルは考えにくいものが多かったのですが, それに比べると, 今年の問題は易しめです。