第１問

解答解説のページへ

[1] 不等式 $\sin 2x > \sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2}$ を満たす x の範囲を求めよう。ただし，$0 \leqq x < 2\pi$ とする。

$a=\sin x$，$b=\cos x$ とおくと，与えられた不等式は，

$$\boxed{\text{ア}}\,ab+\boxed{\text{イ}}\,a-\boxed{\text{ウ}}\,b-1>0$$

となる。左辺の因数分解を利用して x の範囲を求めると

$$\frac{\pi}{\boxed{\text{エ}}}<x<\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}\pi \quad \text{または} \quad \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}\pi<x<\frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}\pi$$

である。

[2] 不等式 $2+\log_{\sqrt{y}} 3 < \log_y 81 + 2\log_y\left(1-\frac{x}{2}\right)$ の表す領域を求めよう。

y と $\sqrt{y}$ は対数の底であるから $y>\boxed{\text{サ}}$，$y \neq \boxed{\text{シ}}$ である。真数は正であるから $x<\boxed{\text{ス}}$ である。ただし，対数 $\log_a b$ に対し，a を底といい，b を真数という。

また，$\log_{\sqrt{y}} 3=\dfrac{\boxed{\text{セ}}}{\log_3 y}$，$\log_y 81=\dfrac{\boxed{\text{ソ}}}{\log_3 y}$ であるから，与えられた不等式は，

$$1<\frac{\boxed{\text{タ}}}{\log_3 y}+\frac{\log_3\left(1-\frac{x}{2}\right)}{\log_3 y}$$

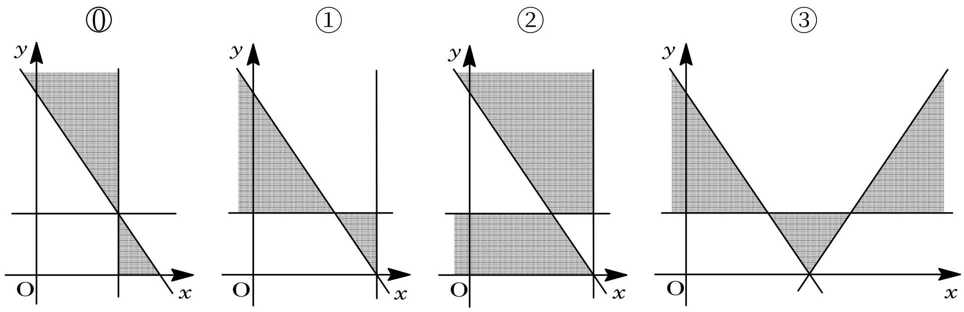
となる。よって，

$$y>\boxed{\text{チ}} \text{ のとき，} \log_3 y<\log_3\left\{\boxed{\text{ツ}}\left(1-\frac{x}{2}\right)\right\}$$

$$\boxed{\text{テ}}<y<\boxed{\text{チ}} \text{ のとき，} \log_3 y>\log_3\left\{\boxed{\text{ツ}}\left(1-\frac{x}{2}\right)\right\}$$

となる。

求める領域を図示すると，次の図 $\boxed{\text{ト}}$ の影をつけた部分となる。ただし，境界(境界線)は含まない。$\boxed{\text{ト}}$ に当てはまるものを，次の⓪～③のうちから１つ選べ。



第2問

解答解説のページへ

$a>0$ として, x の関数 $f(x)$ と $g(x)$ を

$$f(x)=x^3-x,\quad g(x)=f(x-a)+2a$$

とする。

(1) 2つの関数の差 $g(x)-f(x)$ は

$$g(x)-f(x)=a\left(\boxed{\text{アイ}}x^2+\boxed{\text{ウ}}ax-a^2+\boxed{\text{エ}}\right)$$

と表され, x の方程式 $g(x)-f(x)=0$ が異なる2つの実数解をもつような a の範囲は, $0<a<\boxed{\text{オ}}\sqrt{\boxed{\text{カ}}}$ である。

また, $g(x)-f(x)$ は $x=\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$ のとき, 最大値 $\dfrac{a}{\boxed{\text{ケ}}}\left(\boxed{\text{コサ}}-a^{\boxed{\text{シ}}}\right)$ をとる。

(2) (1)で得られた最大値を

$$h(a)=\frac{a}{\boxed{\text{ケ}}}\left(\boxed{\text{コサ}}-a^{\boxed{\text{シ}}}\right)$$

と表す。$h(a)$ を a の関数と考えるとき, $h(a)$ は $a=\boxed{\text{ス}}$ で最大値 $\boxed{\text{セ}}$ をとる。

(3) $a=\sqrt{3}$ のとき, 曲線 $y=f(x)$ と曲線 $y=g(x)$ の2つの交点 P, Q の座標は

$$\mathrm{P}\left(\boxed{\text{ソ}},\ 0\right),\ \mathrm{Q}\left(\sqrt{\boxed{\text{タ}}},\ \boxed{\text{チ}}\sqrt{\boxed{\text{ツ}}}\right)$$

であり, 2つの曲線 $y=f(x)$, $y=g(x)$ で囲まれた部分の面積 S は,

$$S=\frac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}$$

である。

さらに, 交点 $\mathrm{P}\left(\boxed{\text{ソ}},\ 0\right)$ における曲線 $y=f(x)$ の接線と曲線 $y=g(x)$ の接線のなす角を θ $\left(0\leqq\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ とすると, $\tan\theta=\dfrac{\boxed{\text{ナ}}}{\boxed{\text{ニ}}}$ である。

第３問

解答解説のページへ

3 つの数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$がある。

(1) 数列$\{a_n\}$は，初項が-27で，漸化式

$$a_{n+1}=3a_n+60 \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

を満たすとする。このとき

$$a_n=\boxed{\text{ア}}^{\,n}-\boxed{\text{イウ}}$$

である。数列$\{a_n\}$の初項から第 n 項までの和S_nは

$$S_n=\frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}\left(\boxed{\text{カ}}^{\,n}-\boxed{\text{キ}}\right)-\boxed{\text{イウ}}\,n$$

である。また，$S_n>0$となる最小の自然数 n は$\boxed{\text{ク}}$である。

(2) 第 n 項が$2b_n+c_n$で与えられる数列$\{2b_n+c_n\}$は，初項が 0 で公差が d の等差数列になり，第 n 項がb_n-2c_nで与えられる数列$\{b_n-2c_n\}$は，初項が x で公比が r の等比数列になるとする。このときb_n+c_nは

$$b_n+c_n=\frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}d(n-1)-\frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}xr^{n-1}$$

と表される。

(3) 数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$は(1), (2)を満たすとする。さらに，第 n 項がb_n+c_nで与えられる数列$\{b_n+c_n\}$の階差数列は，数列$\{a_n\}$であるとする。このとき

$$a_n=\frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}d+\frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}x(1-r)r^{n-1}$$

であるから, (1)より

$$r=\boxed{\text{ス}},\quad x=\frac{\boxed{\text{セソタ}}}{\boxed{\text{チ}}},\quad d=\boxed{\text{ツテト}}$$

である。したがって，数列$\{b_n\}$，$\{c_n\}$の第 n 項は，それぞれ

$$b_n=-\frac{\boxed{\text{ナ}}}{\boxed{\text{ニ}}}^{\,n}-\boxed{\text{ヌネ}}(n-1),\quad c_n=\boxed{\text{ノ}}^{\,n}-\boxed{\text{ハヒ}}(n-1)$$

である。

第４問

解答解説のページへ

点 O を原点とする座標空間に 4 点 A(1, 0, 0)，B(0, 1, 1)，C(1, 0, 1)，D(−2, −1, −2) がある。$0<a<1$ とし，線分 AB を $a:(1-a)$ に内分する点を E，線分 CD を $a:(1-a)$ に内分する点を F とする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{EF}}$ は a を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{EF}}=\left(\boxed{\text{アイ}}\,a,\ \boxed{\text{ウエ}}\,a,\ \boxed{\text{オ}}-\boxed{\text{カ}}\,a\right)$$

と表される。さらに，$\overrightarrow{\mathrm{EF}}$ が $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ に垂直であるのは $a=\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$ のときである。

(2) $a=\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$ とする。$0<b<1$ として，線分 EF を $b:(1-b)$ に内分する点を G とすると，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ は b を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\left(\frac{\boxed{\text{ケ}}-\boxed{\text{コ}}\,b}{\boxed{\text{サ}}},\ \frac{\boxed{\text{シ}}-\boxed{\text{ス}}\,b}{\boxed{\text{サ}}},\ \frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{サ}}}\right)$$

と表される。

(3) (2)において，直線 OG と直線 BC が交わるときの b の値と，その交点 H の座標を求めよう。

点 H は直線 BC 上にあるから，実数 s を用いて $\overrightarrow{\mathrm{BH}}=s\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ と表される。また，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ は実数 t を用いて $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=t\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ と表される。よって

$$b=\frac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}},\quad s=\frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}},\quad t=\boxed{\text{テ}}$$

である。したがって，点 H の座標は

$$\left(\frac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}},\ \frac{\boxed{\text{ニヌ}}}{\boxed{\text{ナ}}},\ \boxed{\text{ネ}}\right)$$

である。また，点 H は線分 BC を $\boxed{\text{ノ}}:1$ に外分する。