第１問

問題のページへ

[1]　(1)　方程式$2(x-2)^2=|3x-5|$……①に対して，$x<\frac{5}{3}$のとき，

$2(x-2)^2=-(3x-5)$，$2x^2-5x+3=0$，$(x-1)(2x-3)=0$

よって，$x=1,\ \frac{3}{2}$　（ともに$x<\frac{5}{3}$を満たす）

(2)　①より，$x\geqq\frac{5}{3}$のとき，$2(x-2)^2=3x-5$，$2x^2-11x+13=0$，$x=\frac{11\pm\sqrt{17}}{4}$

ここで，$169>9\times17$より$13>3\sqrt{17}$となり，

$3(11-\sqrt{17})>20$，$\frac{11-\sqrt{17}}{4}>\frac{5}{3}$

よって，xの値はともに$x\geqq\frac{5}{3}$を満たし，これより方程式①の解は4個存在する。

また，最大の解αは$\alpha=\frac{11+\sqrt{17}}{4}$であり，$4<\sqrt{17}<5$から$\frac{15}{4}<\alpha<4$となり，$m\leqq\alpha<m+1$を満たす整数$m$は$m=3$である。

[2]　(1)　集合Aは10の倍数である自然数，Bは4の倍数である自然数の集合を表す。

すると，nがAに属することは，nが2で割り切れるための，十分条件であるが，必要条件ではない。

また，自然数nがBに属することは，nが20で割り切れるための，必要条件であるが，十分条件ではない。

(2)　集合Cは10の倍数であり，かつ4の倍数である自然数，Dは10の倍数でなく，しかも4の倍数でもない自然数の集合を表すので，

$C=A\cap B$，$D=\overline{A}\cap\overline{B}=\overline{A\cup B}$

集合Eは20の倍数でない自然数の集合を表すので，集合Cの補集合となり，

$E=\overline{C}=\overline{A\cap B}$

[解 説]

[1]は，グラフを書いて解の個数を判断してもよいのですが，数式だけで処理すると，無理数の大小関係のチェックに時間がかかります。[2]は，今後，定番となりそうな問題です。

第２問

問題のページへ

(1)　G： $y = x^2 - 2(a-1)x + 2a^2 - 8a + 4$ ……①に対して,

$$y = \{x-(a-1)\}^2 - (a-1)^2 + 2a^2 - 8a + 4 = \{x-(a-1)\}^2 + a^2 - 6a + 3$$

よって, 頂点の座標は, $(a-1,\ a^2-6a+3)$ となる。

すると, G が x 軸と異なる 2 点で交わる条件は, $a^2-6a+3<0$ より,

$$3-\sqrt{6}<a<3+\sqrt{6} \text{ ………②}$$

さらに, この 2 つの交点がともに x 軸の負の部分にある条件は, ②に加えて,

$$a-1<0 \text{ ………③},\ 2a^2-8a+4>0 \text{ ………④}$$

③より $a<1$, ④より $a<2-\sqrt{2}$, $2+\sqrt{2}<a$ となり, ②③④を満たす a の値の範囲は, $3-\sqrt{6}<2-\sqrt{2}$ に注意すると,

$$3-\sqrt{6}<a<2-\sqrt{2}$$

(2)　条件より, $3 \leqq a-1 \leqq 7$ なので, $4 \leqq a \leqq 8$ となる。

さて, グラフの軸の位置で場合分けをして, $3 \leqq x \leqq 7$ における最大値を求める。

(i)　$3 \leqq a-1 \leqq 5$ $(4 \leqq a \leqq 6)$ のとき

①は $x=7$ で最大となり, 最大値 M は,

$$M = 49 - 14(a-1) + 2a^2 - 8a + 4 = 2a^2 - 22a + 67$$

(ii)　$5 \leqq a-1 \leqq 7$ $(6 \leqq a \leqq 8)$ のとき

①は $x=3$ で最大となり, 最大値 M は,

$$M = 9 - 6(a-1) + 2a^2 - 8a + 4 = 2a^2 - 14a + 19$$

また, $3 \leqq a-1 \leqq 7$ なので, $3 \leqq x \leqq 7$ における最小値は $x=a-1$ でとり, その値が 6 であることより,

$$a^2-6a+3=6,\ a^2-6a-3=0,\ a=3\pm 2\sqrt{3}$$

すると, $4 \leqq a \leqq 8$ から, $a = 3+2\sqrt{3}$ となる。

このとき, $3+2\sqrt{3}>6$ から, 最大値 M は,

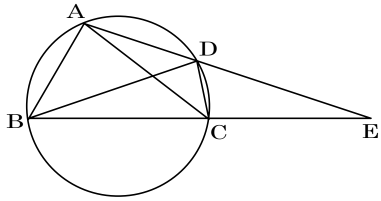
$$M = 2(3+2\sqrt{3})^2 - 14(3+2\sqrt{3}) + 19 = 19 - 4\sqrt{3}$$

[解 説]

2 次関数の基本問題です。場合分けは必要ですが, 複雑なものではありません。完答することが望まれます。

第３問

問題のページへ



(1) △ABC に余弦定理を適用して，

$$\cos B=\frac{2^2+(\sqrt{5}+1)^2-(2\sqrt{2})^2}{2\cdot 2(\sqrt{5}+1)}$$

$$=\frac{2(\sqrt{5}+1)}{4(\sqrt{5}+1)}=\frac{1}{2}$$

よって，$\angle\mathrm{ABC}=60^\circ$ となり，△ABC の外接円の半径を R とすると，正弦定理より，

$$2R=\frac{2\sqrt{2}}{\sin 60^\circ},\quad R=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$$

(2) $\angle\mathrm{BAD}+\angle\mathrm{BCD}=180^\circ$ より，$\sin\angle\mathrm{BAD}=\sin(180^\circ-\angle\mathrm{BCD})=\sin\angle\mathrm{BCD}$ であり，

$$S_1=\frac{1}{2}\cdot 2\mathrm{AD}\sin\angle\mathrm{BAD}=\mathrm{AD}\sin\angle\mathrm{BAD}$$

$$S_2=\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)\mathrm{CD}\sin\angle\mathrm{BCD}=\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)\mathrm{CD}\sin\angle\mathrm{BAD}$$

よって，$\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{2\mathrm{AD}}{(\sqrt{5}+1)\mathrm{CD}}$ となり，$\dfrac{S_1}{S_2}=\sqrt{5}-1$ ……①から，

$$2\mathrm{AD}=(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)\mathrm{CD},\quad \mathrm{CD}=\frac{1}{2}\mathrm{AD}$$

ここで，$\angle\mathrm{CDA}=180^\circ-60^\circ=120^\circ$ から，$\mathrm{CD}=x$ とおき，△ACD に余弦定理を適用すると，

$$(2\sqrt{2})^2=x^2+(2x)^2-2x\cdot 2x\cos 120^\circ,\quad 8=7x^2$$

よって，$x=\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}}=\dfrac{2\sqrt{14}}{7}$

さて，$\angle\mathrm{ABE}=\angle\mathrm{CDE}$ より，$\triangle\mathrm{ABE}\backsim\triangle\mathrm{CDE}$ となり，

$$\frac{S_3}{S_4}=\left(\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{CD}}\right)^2=\left(\frac{7}{\sqrt{14}}\right)^2=\frac{7}{2}\ \cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$\dfrac{S_2}{S_4}=\dfrac{S_3-S_1-S_4}{S_4}=\dfrac{S_3-(\sqrt{5}-1)S_2-S_4}{S_4}=\dfrac{7}{2}-(\sqrt{5}-1)\dfrac{S_2}{S_4}-1$

よって，$\sqrt{5}\dfrac{S_2}{S_4}=\dfrac{5}{2}$ から，$\dfrac{S_2}{S_4}=\dfrac{5}{2\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

[解 説]

センター試験において，過去に何度も出題された円に内接する四角形を題材としています。ただ，相似な図形の面積比は，相似比の 2 乗であることを用いる設問に，現行課程らしさを感じます。

第４問

問題のページへ

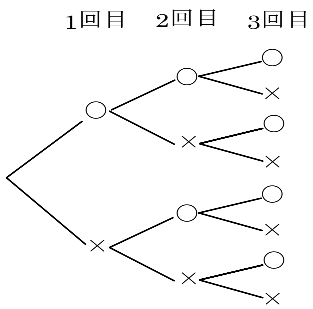
(1)　さいころを投げ, 1 回目, 2 回目, 3 回目に出た目をそれぞれ a, b, c とする。

3 回進めたとき, 点 P が 1 周して頂点 A に到達する条件は,

$$a+b+c=6\quad(1\leqq a\leqq 6,\ 1\leqq b\leqq 6,\ 1\leqq c\leqq 6)\cdots\cdots\cdots(*)$$

よって, (*)を満たす$(a,\ b,\ c)$の組は, ${}_5C_2=10$ 通りある。

さて, 点 P を進めて, A にとまる場合を○, A にとまらない場合を×と記すと, 右のような樹形図ができる。



また, それぞれの枝別れについて, ○に進む場合は 1 通り, ×に進む場合は 5 通りの目の出方がある。

これより, 3 回進める間に, 点 P が 1 回も頂点 A にとまらない目の出方は,

$$5\times5\times5=125 \text{ 通り}$$

(2)　3 回進める間に, 点 P が 3 回とも頂点 A にとまる確率は, $\dfrac{1}{6^3}=\dfrac{1}{216}$ であり, 2 回だけ頂点 A にとまる確率は, $\dfrac{3\times5\times1^2}{6^3}=\dfrac{5}{72}$ である。

さらに, 1 回だけ頂点 A にとまる確率は, $\dfrac{3\times5^2\times1}{6^3}=\dfrac{25}{72}$ である。

(3)　点 P が頂点 A にとまる回数の期待値は, (2)より,

$$0\times\frac{125}{216}+1\times\frac{25}{72}+2\times\frac{5}{72}+3\times\frac{1}{216}=\frac{1}{2}$$

[解 説]

最初の設問にはまり, これをもとに場合分けをしようとすると, 時間がなくなります。上のような樹形図を描くと一目瞭然で, 一気呵成に最後の設問まで進みます。