第１問

問題のページへ

[1]　$\sin\theta = t$ とおくと，$\cos 2\theta = 1-2\sin^2\theta = 1-2t^2$ より，

$$y = 3\cos 2\theta + 4\sin\theta = 3(1-2t^2)+4t = -6t^2+4t+3 = -6\left(t-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{11}{3}$$

$0^\circ \leqq \theta < 180^\circ$ より $0 \leqq t \leqq 1$ となり，最大値 $\frac{11}{3}\left(t=\frac{1}{3}\right)$，最小値 $1\,(t=1)$ である。

また，$f(\alpha)=3$ となるのは，$-6t^2+4t+3=3$ から $t=0,\ \frac{2}{3}$ であるが，条件から，$0^\circ < \alpha < 90^\circ$ なので，$t=\frac{2}{3}$ であり，

$$\sin\alpha = \frac{2}{3},\ \cos\alpha = \sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

よって，$\sin(\alpha+30^\circ) = \sin\alpha\cos 30^\circ + \cos\alpha\sin 30^\circ = \frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{5}}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{2\sqrt{3}+\sqrt{5}}{6}$

[2]　(1)　$2\log_3 x - 4\log_x 27 \leqq 5 \cdots\cdots(*)$ に対し, $x>0$ かつ $x\neq 1$ のもとで,

$$\log_x 27 = \frac{\log_3 27}{\log_3 x} = \frac{\log_3 3^3}{\log_3 x} = \frac{3\log_3 3}{\log_3 x} = \frac{3}{\log_3 x}$$

(2)　$(*)$より，$2\log_3 x - \frac{12}{\log_3 x} \leqq 5 \cdots\cdots\cdots(**)$

(i)　$0<x<1$ のとき　$\log_3 x < 0$ なので, $(**)$より,

$$2(\log_3 x)^2 - 5\log_3 x - 12 \geqq 0,\ (2\log_3 x+3)(\log_3 x - 4) \geqq 0$$

よって，$\log_3 x<0$ から $\log_3 x \leqq -\frac{3}{2}$ となり，$0<x\leqq 3^{-\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{9}$

(ii)　$x>1$ のとき　$\log_3 x>0$ なので, $(**)$より,

$$2(\log_3 x)^2 - 5\log_3 x - 12 \leqq 0,\ (2\log_3 x+3)(\log_3 x - 4) \leqq 0$$

よって，$\log_3 x>0$ から $0<\log_3 x\leqq 4$ となり，$1<x\leqq 3^4 = 81$

(i)(ii)より，$0<x\leqq\frac{\sqrt{3}}{9}$，$1<x\leqq 81$

[解 説]

新課程の第 1 問は, 旧課程と同じく, 三角関数と指数・対数関数の小問 2 題の組合せとなっています。なお, 三角関数は度数法での出題でした。

第２問

問題のページへ

(1)　$C_1 : y = x^2$ ……①，$C_2 : y = x^2 - 4ax + 4a(a+1)$ ……②に対して，

①から $y' = 2x$ なので，点 $(t,\ t^2)$ における接線の方程式は，

$$y - t^2 = 2t(x - t),\quad y = 2tx - t^2 \text{ ………③}$$

②と③の共有点は，$x^2 - 4ax + 4a(a+1) = 2tx - t^2$

$$x^2 - 2(2a+t)x + 4a(a+1) + t^2 = 0 \text{ ………④}$$

②と③が接することより，$D/4 = (2a+t)^2 - 4a(a+1) - t^2 = 0$

$$4at - 4a = 0,\quad t = 1\ (a > 0)$$

このとき③より，$l : y = 2x - 1$ ………⑤

さて，④の重解は，$x = 2a + t = 2a + 1$ となり，⑤から，

$$y = 2(2a+1) - 1 = 4a + 1$$

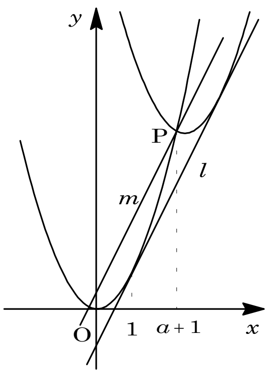
よって，l と C_2 の接点の座標は，$(2a+1,\ 4a+1)$ である。

(2)　①②より，$x^2 = x^2 - 4ax + 4a(a+1)$ から，$x = a + 1$ となり，C_1，C_2 の交点 P は，

$$\mathrm{P}(a+1,\ (a+1)^2)$$

すると，P を通って直線 l に平行な直線 m は，

$$y - (a+1)^2 = 2\{x - (a+1)\},\quad y = 2x + a^2 - 1$$



直線 m の y 切片が正より，$y = a^2 - 1 > 0$ であるが，$a > 0$ から $a > 1$ となる。

このとき，C_1 の $x \geqq 0$ の部分と直線 m および y 軸で囲まれた図形の面積 S は，

$$S = \int_0^{a+1} (2x + a^2 - 1 - x^2)\,dx$$
$$= \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 + (a^2 - 1)x \right]_0^{a+1}$$
$$= -\frac{1}{3}(a+1)^3 + (a+1)^2 + (a^2-1)(a+1) = \frac{1}{3}(a+1)^2(2a-1)$$

[解　説]

接線と面積が絡んでいる微積分の総合問題です。計算量も多くはなく，平均点の上昇に寄与している問題です。

第３問

問題のページへ

(1)　a, b, c は，この順に等差数列なので，$2b=a+c$ ………①

また, c, a, b は，この順に等比数列なので，$a^2=bc$ ………②

①②より，$a^2=b(2b-a)$，$a^2+ab-2b^2=0$，$(a+2b)(a-b)=0$

$a\neq b$ から $b=-\frac{1}{2}a$ となり，①より，

$$c=2\cdot\left(-\frac{1}{2}a\right)-a=-2a$$

よって，等差数列 $\{x_n\}$ の公差は，$b-a=-\frac{1}{2}a-a=-\frac{3}{2}a$

(2)　等比数列 $\{y_n\}$ の初項は $-2a$，公比は $\frac{b}{a}=-\frac{1}{2}$ より，

$$y_1+y_2+\cdots+y_8=\frac{-2a\left\{1+\left(-\frac{1}{2}\right)^8\right\}}{1+\frac{1}{2}}=-\frac{4}{3}a\cdot\frac{255}{256}=-\frac{85}{64}a$$

(3)　$z_1=-\frac{1}{2}a$，$z_2=-2a$，$z_3=a$ から，

$$w_1=z_2-z_1=-\frac{3}{2}a,\quad w_2=z_3-z_2=3a$$

さて，$\{w_n\}$ は等差数列なので，その公差は $w_2-w_1=\frac{9}{2}a$ となり，

$$w_n=-\frac{3}{2}a+\frac{9}{2}a(n-1)=\frac{9n-12}{2}a$$

よって，数列 $\{z_n\}$ の一般項は, $n\geqq 2$ において,

$$z_n=-\frac{1}{2}a+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{9k-12}{2}a=-\frac{1}{2}a+\frac{a}{2}\left\{\frac{9}{2}(n-1)n-12(n-1)\right\}$$

$$=\frac{a}{4}(9n^2-33n+22)$$（$n=1$ のときも満たしている）

[解 説]

等差数列，等比数列，階差数列についての設問です。基本的な公式の確認のための，適切な問題となっています。

第４問

問題のページへ

(1) $|\vec{a}+\vec{b}|=1$ から，$|\vec{a}+\vec{b}|^2=1$ となり，$|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=1$

すると，$|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$ なので，$\vec{a}\cdot\vec{b}=-\frac{1}{2}$

また，$|2\vec{a}+\vec{b}|^2=4|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=4+4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+1=3$ から，$|2\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{3}$

ここで，$(2\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{b}=2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+1=0$ から，$2\vec{a}+\vec{b}$ と $\vec{b}$ のなす角は 90° である。

(2) $\vec{c}=s\vec{a}+t\vec{b}$ とおくと，$|\vec{c}|=1$ より，$|s\vec{a}+t\vec{b}|^2=1$ となり，

$s^2|\vec{a}|^2+2st\,\vec{a}\cdot\vec{b}+t^2|\vec{b}|^2=1$，$s^2-st+t^2=1$ ………①

また，$\vec{c}\cdot\vec{a}=0$ より，$(s\vec{a}+t\vec{b})\cdot\vec{a}=0$ となり，

$s|\vec{a}|^2+t\,\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，$s-\frac{1}{2}t=0$，$t=2s$ ………②

さらに，$\vec{b}\cdot\vec{c}>0$ から，$\vec{b}\cdot(s\vec{a}+t\vec{b})>0$ となり，$-\frac{1}{2}s+t>0$ ………③

①②より $s^2-2s^2+4s^2=1$，$s^2=\frac{1}{3}$ となるが，②③より $s>0$ であるので，

$s=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$t=2s=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

よって，$\vec{c}=\frac{\sqrt{3}}{3}(\vec{a}+2\vec{b})$ となる。

(3) (2)より，$\vec{b}\cdot\vec{c}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{2\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ となり，$\vec{p}=x\vec{a}+y\vec{c}$ から，

$\vec{p}\cdot\vec{a}=(x\vec{a}+y\vec{c})\cdot\vec{a}=x$，$\vec{p}\cdot\vec{b}=(x\vec{a}+y\vec{c})\cdot\vec{b}=-\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y$

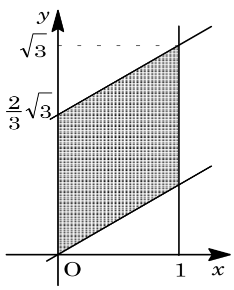
条件より，$0\leqq\vec{p}\cdot\vec{a}\leqq1$ なので，$0\leqq x\leqq1$

また，$0\leqq\vec{p}\cdot\vec{b}\leqq1$ なので，$0\leqq-\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y\leqq1$

$0\leqq -x+\sqrt{3}y\leqq2$，$x\leqq\sqrt{3}y\leqq x+2$

ここで，$\vec{p}\cdot\vec{c}=(x\vec{a}+y\vec{c})\cdot\vec{c}=y$ から，$\vec{p}\cdot\vec{c}$ は最大値 $\sqrt{3}$ をとり，このとき，$x=1$ なので，

$\vec{p}=\vec{a}+\sqrt{3}\vec{c}=\vec{a}+\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}(\vec{a}+2\vec{b})=2\vec{a}+2\vec{b}$



[解 説]

ベクトルは，昨年と変わらず，本年も質・量ともに重めです。(2)は計算で押し進めましたが，ポイントとなる $\vec{c}=s\vec{a}+t\vec{b}$ の設定はやや難です。