第１問

解答解説のページへ

[1] $0° \leqq \theta < 180°$ の範囲で関数 $f(\theta) = 3\cos 2\theta + 4\sin\theta$ を考える。

$\sin\theta = t$ とおけば，$\cos 2\theta = \boxed{\text{ア}} - \boxed{\text{イ}}\, t^{\boxed{\text{ウ}}}$ であるから，$y = f(\theta)$ とおくと，

$$y = -\boxed{\text{エ}}\, t^{\boxed{\text{ウ}}} + \boxed{\text{オ}}\, t + \boxed{\text{カ}}$$

である。したがって, y の最大値は $\dfrac{\boxed{\text{キク}}}{3}$ であり，最小値は $\boxed{\text{ケ}}$ である。

また，α が $0° < \alpha < 90°$ を満たす角度で $f(\alpha) = 3$ のとき

$$\sin(\alpha + 30°) = \frac{\boxed{\text{コ}}\sqrt{\boxed{\text{サ}}} + \sqrt{\boxed{\text{シ}}}}{\boxed{\text{ス}}}$$

である。

[2] 不等式 $2\log_3 x - 4\log_x 27 \leqq 5$ ……(∗)が成り立つような x の値の範囲を求めよう。

(1) 不等式(∗)において, x は対数の底であるから, $x > \boxed{\text{セ}}$ かつ $x \neq \boxed{\text{ソ}}$ を満たさなければならない。また，$\log_x 27 = \dfrac{\boxed{\text{タ}}}{\log_3 x}$ である。

(2) 不等式(∗)は, $\boxed{\text{セ}} < x < \boxed{\text{ソ}}$ のとき,

$$\boxed{\text{チ}}(\log_3 x)^2 - \boxed{\text{ツ}}\log_3 x - \boxed{\text{テト}} \geqq 0$$

$x > \boxed{\text{ソ}}$ のとき,

$$\boxed{\text{チ}}(\log_3 x)^2 - \boxed{\text{ツ}}\log_3 x - \boxed{\text{テト}} \leqq 0$$

と変形できる。したがって，求める x の値の範囲は,

$$\boxed{\text{セ}} < x \leqq \frac{\sqrt{\boxed{\text{ナ}}}}{\boxed{\text{ニ}}},\quad \boxed{\text{ソ}} < x \leqq \boxed{\text{ヌネ}}$$

である。

第２問

解答解説のページへ

a を正の実数として，C_1，C_2 をそれぞれ次の 2 次関数のグラフとする。

$$C_1 : y = x^2,\quad C_2 : y = x^2 - 4ax + 4a(a+1)$$

また，C_1 と C_2 の両方に接する直線を l とする。

(1)　点 $(t,\ t^2)$ における C_1 の接線の方程式は，$y = \boxed{\text{ア}}\,tx - t^{\boxed{\text{イ}}}$ であり，この直線が C_2 に接するのは $t = \boxed{\text{ウ}}$ のときである。

　したがって，直線 l の方程式は，$y = \boxed{\text{エ}}\,x - \boxed{\text{オ}}$ であり，l と C_2 の接点の座標は，

$$\left(\boxed{\text{カキ}} + \boxed{\text{ク}},\ \boxed{\text{ケコ}} + \boxed{\text{サ}} \right)$$

である。

(2)　C_1 と C_2 の交点を P とすると, P の座標は,

$$\left(a + \boxed{\text{シ}},\ \left(a + \boxed{\text{シ}} \right)^2 \right)$$

である。点 P を通って直線 l に平行な直線を m とする。直線 m の方程式は

$$y = \boxed{\text{ス}}\,x + a^{\boxed{\text{セ}}} - \boxed{\text{ソ}}$$

である。直線 m と y 軸との交点の y 座標が正となるような a の値の範囲は, $a > \boxed{\text{タ}}$ である。

　$a > \boxed{\text{タ}}$ のとき，C_1 の $x \geqq 0$ の部分と直線 m および y 軸で囲まれた図形の面積 S は a を用いて

$$S = \frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}} \left(\boxed{\text{テ}} + 1 \right)^{\boxed{\text{ト}}} \left(\boxed{\text{ナニ}} - 1 \right)$$

と表される。

第３問

解答解説のページへ

a, b, c を相異なる実数とする。数列$\{x_n\}$は等差数列で，最初の 3 項が順に a, b, c であるとし，数列$\{y_n\}$は等比数列で，最初の 3 項が順に c, a, b であるとする。

(1) b と c は a を用いて，$b = \dfrac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}}a$，$c = \boxed{\text{エオ}}\,a$ と表され，等差数列$\{x_n\}$の公差は $\dfrac{\boxed{\text{カキ}}}{\boxed{\text{ク}}}a$ である。

(2) 等比数列$\{y_n\}$の公比は $\dfrac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$ であるから，$\{y_n\}$の初項から第 8 項までの和は a を用いて，$\dfrac{\boxed{\text{ケコサ}}}{\boxed{\text{シス}}}a$ と表される。

(3) 数列$\{z_n\}$は最初の 3 項が順に b，c，a であり，その階差数列$\{w_n\}$が等差数列であるとする。このとき，$\{w_n\}$の公差は $\dfrac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}a$ であり，$\{w_n\}$の一般項は

$$w_n = \frac{\boxed{\text{タ}}\,n - \boxed{\text{チツ}}}{\boxed{\text{テ}}}a$$

である。したがって，数列$\{z_n\}$の一般項は, a を用いて

$$z_n = \frac{a}{\boxed{\text{ト}}}\left(\boxed{\text{ナ}}\,n^2 - \boxed{\text{ニヌ}}\,n + \boxed{\text{ネノ}}\right)$$

と表される。

第４問

解答解説のページへ

平面上の 3 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ は，$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=|\vec{a}+\vec{b}|=1$ を満たし，$\vec{c}$ は $\vec{a}$ に垂直で，$\vec{b}\cdot\vec{c}>0$ であるとする。

(1)　$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積は，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$ である。また，$|2\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{\boxed{\text{エ}}}$ であり，$2\vec{a}+\vec{b}$ と $\vec{b}$ のなす角は $\boxed{\text{オカ}}^\circ$ である。

(2)　ベクトル $\vec{c}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ で表すと，$\vec{c}=\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{キ}}}}{\boxed{\text{ク}}}\left(\vec{a}+\boxed{\text{ケ}}\vec{b}\right)$ である。

(3)　x, y を実数とする。ベクトル $\vec{p}=x\vec{a}+y\vec{c}$ が，$0\leqq\vec{p}\cdot\vec{a}\leqq1$，$0\leqq\vec{p}\cdot\vec{b}\leqq1$ を満たすための必要十分条件は

$$\boxed{\text{コ}}\leqq x\leqq\boxed{\text{サ}},\quad x\leqq\sqrt{\boxed{\text{シ}}}\,y\leqq x+\boxed{\text{ス}}$$

である。x と y が上の範囲を動くとき，$\vec{p}\cdot\vec{c}$ は最大値 $\sqrt{\boxed{\text{セ}}}$ をとり，この最大値をとるときの $\vec{p}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ で表すと，$\vec{p}=\boxed{\text{ソ}}\vec{a}+\boxed{\text{タ}}\vec{b}$ である。