第１問

問題のページへ

[1]　$x^2-3x-1=0$ より，$x=\dfrac{3\pm\sqrt{13}}{2}$ となり，この解を α, β $(\alpha>\beta)$ とおくとき，

$$\alpha=\frac{3+\sqrt{13}}{2},\quad \beta=\frac{3-\sqrt{13}}{2}$$

ここで，$3<\sqrt{13}<4$ から，$3<\alpha<\dfrac{7}{2}$，$-\dfrac{1}{2}<\beta<0$ となり，α, β の整数部分 m, n は，

$$m=3,\quad n=-1$$

また，$\alpha+\dfrac{1}{\alpha}=\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}+\dfrac{2}{3+\sqrt{13}}=\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}+\dfrac{\sqrt{13}-3}{2}=\sqrt{13}$ から，

$$\alpha^3+\frac{1}{\alpha^3}=\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)^3-3\alpha\cdot\frac{1}{\alpha}\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)=13\sqrt{13}-3\sqrt{13}=10\sqrt{13}$$

[2]　(1)　条件「a, b はともに有理数」の否定は，「a, b の少なくとも一方は有理数でない」，すなわち「a, b の少なくとも一方は無理数」である。

(2)　$a=\sqrt{2}$，$b=-\sqrt{2}$ とすると，$a+b$，ab，$\dfrac{a}{b}$ は有理数であるが，a，b は有理数でない。逆に，a，b がともに有理数のとき，$a+b$，ab，$\dfrac{a}{b}$ は有理数である。

よって，条件「q かつ r」は，条件 p が成り立つための必要条件であるが十分条件ではない。

(3)　(2)より，「$p \Rightarrow q$」は真，「$p \Rightarrow q$」の逆「$q \Rightarrow p$」は偽となる。また，「$p \Rightarrow q$」が真より，「$p \Rightarrow q$」の対偶「$\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$」は真となる。

[解 説]

新課程となり，問題の構成に変化が見られました。この第 1 問は，数学Ⅰ「方程式と不等式」と数学A「命題と論理」の小問 2 題の組合せとなっています。[2]はセンター試験としては目新しいものです。

第２問

問題のページへ

2 次関数 $y=6x^2+11x-10$ ……①に対して, $y\leqq 0$ とすると，$6x^2+11x-10\leqq 0$

$$(2x+5)(3x-2)\leqq 0,\ -\frac{5}{2}\leqq x\leqq\frac{2}{3}$$

①のグラフを x 軸方向に a, y 軸方向に b だけ平行移動すると,

$$y-b=6(x-a)^2+11(x-a)-10$$

$$y=6x^2-(12a-11)x+(6a^2-11a-10+b)$$

原点$(0,\ 0)$を通るので，$6a^2-11a-10+b=0$，$b=-6a^2+11a+10$ となり,

$$y=6x^2-(12a-11)x\ \cdots\cdots\cdots②$$

②を変形して，$y=6\left(x-\dfrac{12a-11}{12}\right)^2-\dfrac{(12a-11)^2}{24}$

さて，$x=-2$ と $x=3$ に対応する値が等しくなることより，②のグラフの軸の方程式は $x=\dfrac{-2+3}{2}=\dfrac{1}{2}$ であるので,

$$\frac{12a-11}{12}=\frac{1}{2},\ a=\frac{17}{12}$$

このとき，$-2\leqq x\leqq 3$ において，2 次関数②は $x=\dfrac{1}{2}$ で最小，$x=-2$ または $x=3$ で最大となる。

よって，最小値は $-\dfrac{(17-11)^2}{24}=-\dfrac{3}{2}$，最大値は $6\cdot(-2)^2-6\cdot(-2)=36$ である。

[解 説]

やや易しめの定番の 2 次関数です。後半はグラフの軸に注目しましたが，普通に $x=-2$ と $x=3$ の値が等しいとして計算しても，量的にはほとんど変わりません。

第３問

問題のページへ

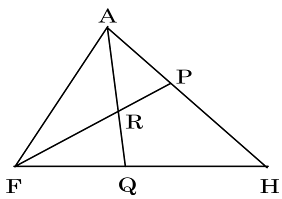
三平方の定理より，$\mathrm{FE}=\sqrt{8^2-10}=\sqrt{54}$，$\mathrm{EH}=\sqrt{10^2-10}=\sqrt{90}$ となり，

$$\mathrm{FH}=\sqrt{54+90}=12$$

また，余弦定理から，$\cos\angle\mathrm{FAH}=\dfrac{8^2+10^2-12^2}{2\cdot8\cdot10}=\dfrac{1}{8}$ なので，

$$\triangle\mathrm{AFH}=\frac{1}{2}\mathrm{AF}\cdot\mathrm{AH}\sin\angle\mathrm{FAH}=\frac{1}{2}\cdot8\cdot10\sqrt{1-\left(\frac{1}{8}\right)^2}=15\sqrt{7}$$

さて，$\angle$AFH の二等分線と $\angle$FAH の二等分線の交点が R なので，R は三角形 AFH の内心である。



FP は $\angle$AFH を二等分するので，内角の二等分線の定理より，AP : PH = FA : FH = 8 : 12 = 2 : 3 となり，

$$\mathrm{AP}=\frac{2}{2+3}\times10=4$$

また，AR は $\angle$FAP を二等分するので，同様にすると，FR : RP = AF : AP = 8 : 4 = 2 : 1 となり，

$$\mathrm{PF}:\mathrm{PR}=3:1$$

これより，三角形 ARP の面積は，

$$\triangle\mathrm{ARP}=\frac{\mathrm{PR}}{\mathrm{PF}}\triangle\mathrm{AFP}=\frac{\mathrm{PR}}{\mathrm{PF}}\times\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{AH}}\triangle\mathrm{AFH}=\frac{1}{3}\times\frac{2}{5}\triangle\mathrm{AFH}=\frac{2}{15}\triangle\mathrm{AFH}$$

一方，四面体 EAFH の体積 V_0 は，

$$V_0=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\mathrm{FE}\cdot\mathrm{EH}\cdot\mathrm{AE}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{54}\cdot\sqrt{90}\cdot\sqrt{10}=15\sqrt{6}$$

よって，四面体 EAPR の体積 V は，

$$V=\frac{\triangle\mathrm{ARP}}{\triangle\mathrm{AFH}}V_0=\frac{2}{15}\times15\sqrt{6}=2\sqrt{6}$$

[解 説]

数学 A の「平面図形」の出題形式については，いろいろな憶測が流れましたが，初年度は数学Ⅰの「図形と計量」との融合という形になりました。なお，最後の設問は，旧課程でもよくあったように，解くのに時間がかかります。

第４問

問題のページへ

(1)　a, b, c, d の最大の数が 3 以下である場合は，$3^4=81$ 通りある。

最大の数が 4 である場合は，すべての場合から，最大の数が 3 以下である場合を除いたものであり，$4^4-81=175$ 通りある。

(2)　$a<b<c$ となる場合は，1 から 4 までの数から異なる 3 つを取り出し，小さい方から a, b, c と対応させ, d は任意と考えて，${}_4C_3\times 4=16$ 通りある。

(3)　(i)　得点が 1 点となるのは，$d-a+1=1$ すなわち $d=a$ から，$a=b=c=d$ の場合だけであり，その確率は，$\dfrac{4}{4^4}=\dfrac{4}{256}=\dfrac{1}{64}$ となる。

得点が 4 点となるのは，$d-a+1=4$ すなわち $d=a+3$ から，$a=1$ かつ $d=4$ となり，$1\leqq b\leqq c\leqq 4$ である。すると，$(b,\ c)$ の組は $1\leqq b<c\leqq 4$ のとき ${}_4C_2=6$ 通り, $1\leqq b=c\leqq 4$ のとき ${}_4C_1=4$ 通りで，合わせて 10 通りとなる。よって，この確率は，$\dfrac{10}{4^4}=\dfrac{10}{256}=\dfrac{5}{128}$ である。

(ii)　得点が 3 点となるのは，$d-a+1=3$ すなわち $d=a+2$ から，$1\leqq b\leqq c\leqq 3$ または $2\leqq b\leqq c\leqq 4$ である。すると，$1\leqq b\leqq c\leqq 3$ のとき ${}_3C_2+{}_3C_1=6$ 通り，$2\leqq b\leqq c\leqq 4$ のときも ${}_3C_2+{}_3C_1=6$ 通りで，その確率は，$\dfrac{6+6}{4^4}=\dfrac{12}{256}$ となる。

得点が 2 点となるのは，$d-a+1=2$ すなわち $d=a+1$ から，$1\leqq b\leqq c\leqq 2$ または $2\leqq b\leqq c\leqq 3$ または $3\leqq b\leqq c\leqq 4$ である。同様に考えると，いずれの場合も ${}_2C_2+{}_2C_1=3$ 通りずつなので，その確率は，$\dfrac{3+3+3}{4^4}=\dfrac{9}{256}$ となる。

以上より，得点の期待値は，

$$1\times\frac{4}{256}+2\times\frac{9}{256}+3\times\frac{12}{256}+4\times\frac{10}{256}=\frac{49}{128}$$

[解 説]

場合の数の比重の大きい確率分野の問題です。(3)では組合せを利用して数えましたが，適する場合をすべて書き並べた方が実戦的かもしれません。もっとも，重複組合せでもできますが。なお，10 年も前のことになりますが，1997 年からセンター試験が大幅に形式変更するため，その前年に大学入試センターが例題というのを作ったことがあります。類題が出題されているような気がしましたので，調べたところ，その中に本問と似た問題が入っていました。