第１問[1]

問題のページへ

(1)　まず，$\mathrm{AC}^2=(\cos 2\theta+1)^2+\sin^2 2\theta=2+2\cos 2\theta=2\cdot 2\cos^2\theta=4\cos^2\theta$

$$\begin{aligned}\mathrm{BC}^2&=(\cos 2\theta-\cos\theta)^2+(\sin 2\theta-\sin\theta)^2\\&=2-2(\cos 2\theta\cos\theta+\sin 2\theta\sin\theta)=2-2\cos\theta=2\cdot 2\sin^2\frac{\theta}{2}=4\sin^2\frac{\theta}{2}\end{aligned}$$

$0°\leqq\theta\leqq 180°$ より，$0°\leqq\dfrac{\theta}{2}\leqq 90°$ なので，

$$d=\mathrm{AC}+\mathrm{BC}=\sqrt{4\cos^2\theta}+\sqrt{4\sin^2\frac{\theta}{2}}=2|\cos\theta|+2\sin\frac{\theta}{2}$$

(2)　$0°\leqq\theta\leqq 90°$ のとき $0°\leqq\dfrac{\theta}{2}\leqq 45°$ より，$t=\sin\dfrac{\theta}{2}$ とおくと，$0\leqq t\leqq\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

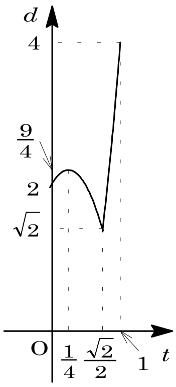
このとき $\cos\theta\geqq 0$ から，

$$d=2\cos\theta+2\sin\frac{\theta}{2}=2\left(1-2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)+2\sin\frac{\theta}{2}=-4t^2+2t+2\cdots\cdots\cdots①$$

また，$90°\leqq\theta\leqq 180°$ のとき $45°\leqq\dfrac{\theta}{2}\leqq 90°$ より，$\dfrac{\sqrt{2}}{2}\leqq t\leqq 1$

このとき $\cos\theta\leqq 0$ から，

$$\begin{aligned}d&=-2\cos\theta+2\sin\frac{\theta}{2}=-2\left(1-2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)+2\sin\frac{\theta}{2}\\&=4t^2+2t-2\cdots\cdots\cdots②\end{aligned}$$



①より $d=-4\left(t-\dfrac{1}{4}\right)^2+\dfrac{9}{4}$，②より $d=4\left(t+\dfrac{1}{4}\right)^2-\dfrac{9}{4}$ となるので，まとめると，右図のようになる。

したがって，d は $t=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $(\theta=90°)$ のとき最小値 $\sqrt{2}$ をとり，また $t=1$ $(\theta=180°)$ のとき最大値 4 をとる。

[解　説]

難問というわけではないのですが，問題量が多く，解くのに時間がかかります。

第１問[2]

問題のページへ

(1)　$2^x=\left(\frac{5}{2}\right)^y$ より，$x=\log_2\left(\frac{5}{2}\right)^y=y(\log_2 5-\log_2 2)=y(\log_2 5-1)$

$$b-a=\frac{5}{2}y-2y(\log_2 5-1)=y\left(\frac{9}{2}-2\log_2 5\right)$$

ここで，$\frac{9}{2}-2\log_2 5=\frac{1}{2}(\log_2 2^9-\log_2 5^4)<0$ から，$b-a<0$，$b<a$

(2)　$2^x=3^z$ より，$x=\log_2 3^z=z\log_2 3$ となり，

$$c-a=3z-2z\log_2 3=z(3-2\log_2 3)$$

ここで，$3-2\log_2 3=\log_2 2^3-\log_2 3^2<0$ から，$c-a<0$，$c<a$

(3)　$\left(\frac{5}{2}\right)^y=3^z$ より，$z=\log_3\left(\frac{5}{2}\right)^y=y\log_3\frac{5}{2}$ となり，

$$c-b=3y\log_3\frac{5}{2}-\frac{5}{2}y=\frac{y}{2}\left(6\log_3\frac{5}{2}-5\right)=\frac{y}{2}\left\{\log_3\left(\frac{5}{2}\right)^6-\log_3 3^5\right\}$$

ここで，$3^5<\left(\frac{5}{2}\right)^6$ から，$c-b>0$，$c>b$ となり, (1)(2)より，$b<c<a$ である。

[解 説]

同じ作業を 3 回くり返すだけですが, 前問と同じく計算量は多めです。

第２問

問題のページへ

(1)　$y=x^2+2ax-a^3-2a^2=(x+a)^2-a^3-3a^2$ より，頂点 $\mathrm{P}(-a,\ -a^3-3a^2)$ となる。そこで，$\mathrm{P}(x,\ y)$ とおくと，

$x=-a$ ………①，$y=-a^3-3a^2$ ………②

①から $a=-x$，②に代入すると，P の軌跡は，

$y=-(-x)^3-3(-x)^2=x^3-3x^2$

(2)　②より，$y'=-3a^2-6a=-3a(a+2)$

$-3\leqq a<1$ において，右表より，y は $a=0$ と $a=-3$ のとき最大になり，$a=-2$ のとき最小になる。

a	-3	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	1
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	0	↘	-4	↗	0	↘	-4

(3)　$a=0$ のとき，$C_1: y=x^2$ ………③

$a=-3$ のとき，$C_2: y=(x-3)^2=x^2-6x+9$ ………④

$a=-2$ のとき，$C_3: y=(x-2)^2-4=x^2-4x$ ………⑤

このとき，C_1 と C_2 の交点は，③④から，

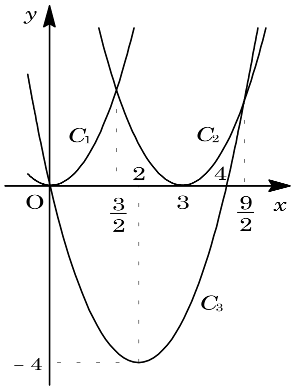
$x^2=x^2-6x+9$，$x=\dfrac{3}{2}$

また，C_1 と C_3 の交点は，③⑤から，

$x^2=x^2-4x$，$x=0$

さらに，C_2 と C_3 の交点は，④⑤から，

$x^2-6x+9=x^2-4x$，$x=\dfrac{9}{2}$



(4)　(3)から，C_1，C_2，C_3 の位置関係を図示すると，右図のようになる。

これらで囲まれた図形の面積を S とすると，

$$S=\int_0^{\frac{3}{2}}\{x^2-(x^2-4x)\}dx+\int_{\frac{3}{2}}^{\frac{9}{2}}\{(x^2-6x+9)-(x^2-4x)\}dx$$

$$=\int_0^{\frac{3}{2}}4x\,dx+\int_{\frac{3}{2}}^{\frac{9}{2}}(-2x+9)\,dx$$

すると，S は 3 点 $(0,\ 0)$，$\left(\dfrac{3}{2},\ 6\right)$，$\left(\dfrac{9}{2},\ 0\right)$ を頂点とする三角形の面積に一致し，

$$S=\frac{1}{2}\times\frac{9}{2}\times 6=\frac{27}{2}$$

[解 説]

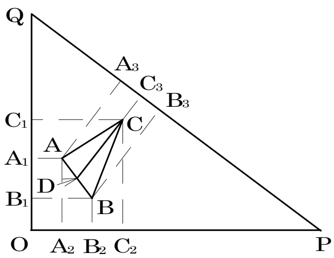
第 1 問と異なり，複雑な計算もなく，量的にも少なめです。なお，最後の積分計算は，上端と下端の値が整数でないので，三角形の面積を対応させました。

第３問

問題のページへ

$\overrightarrow{AB}=(x,\ y)$，$\overrightarrow{AC}=(z,\ w)$において，$A_1$が線分$B_1C_1$の中点なので，

$$w+y=0,\ w=-y\cdots\cdots\cdots①$$



$\overrightarrow{BA}=(-x,\ -y)$，$\overrightarrow{BC}=(z-x,\ w-y)$において，$B_2$が線分$A_2C_2$の中点なので，

$$-x+(z-x)=0,\ z=2x\cdots\cdots\cdots②$$

ABの中点をDとすると，D，C，C_3は一直線上にあるので，$\overrightarrow{CD}\perp\overrightarrow{PQ}$となり，

$$\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{PQ}=0\cdots\cdots\cdots③$$

ここで，$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=(-4,\ 3)$，$\overrightarrow{CD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC})\cdots\cdots\cdots④$

①②より，$\overrightarrow{AC}=(2x,\ -y)$であるので，④から，

$$\overrightarrow{CD}=\frac{1}{2}\{(x,\ y)-2(2x,\ -y)\}=\frac{3}{2}(-x,\ y)$$

よって，③より，$-4(-x)+3y=0$から，$y=-\frac{4}{3}x$となり，

$$\overrightarrow{AB}=x\left(1,\ -\frac{4}{3}\right),\ \overrightarrow{AC}=x\left(2,\ \frac{4}{3}\right)$$

すると，$|\overrightarrow{AB}|=x\sqrt{1+\frac{16}{9}}=\frac{5}{3}x$，$|\overrightarrow{AC}|=x\sqrt{4+\frac{16}{9}}=\frac{2\sqrt{13}}{3}x$より，

$$AC=\frac{2\sqrt{13}}{3}\cdot\frac{3}{5}AB=\frac{2\sqrt{13}}{5}AB$$

さらに，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=x^2\left(2-\frac{16}{9}\right)=\frac{2}{9}x^2$から，

$$\cos\angle BAC=\frac{\frac{2}{9}x^2}{\frac{5}{3}x\cdot\frac{2\sqrt{13}}{3}x}=\frac{1}{5\sqrt{13}}=\frac{\sqrt{13}}{65}$$

[解 説]

スタートがうまくできれば，流れに乗ることができます。得点差のつく問題です。

第4問

問題のページへ

条件より，$\alpha+\beta+\gamma=0$ ……①，$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=p$ ……②，$\alpha\beta\gamma=q$ ……③

まず，△ABC は AB = AC の直角二等辺三角形なので，∠BAC = 90° であり，

$$\arg\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\pm 90^\circ,\quad \left|\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right|=\frac{|\gamma-\alpha|}{|\beta-\alpha|}=1$$

ここで，$\arg\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=90^\circ$ のとき，$\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\cos 90^\circ+i\sin 90^\circ=i$ より，

$$\gamma-\alpha=i(\beta-\alpha),\quad \gamma=(1-i)\alpha+i\beta \text{ ………④}$$

①に代入して，$\alpha+\beta+(1-i)\alpha+i\beta=0$，$(1+i)\beta=(-2+i)\alpha$

$$\beta=\frac{-2+i}{1+i}\alpha=\frac{-1+3i}{2}\alpha$$

④に代入して，$\gamma=(1-i)\alpha+i\cdot\dfrac{-1+3i}{2}\alpha=\dfrac{-1-3i}{2}\alpha$

次に，①②より，$p=\alpha(\beta+\gamma)+\beta\gamma=-\alpha^2+\dfrac{-1+3i}{2}\cdot\dfrac{-1-3i}{2}\alpha^2=\dfrac{3}{2}\alpha^2$ ………⑤

③より，$q=\alpha\beta\gamma=\alpha\cdot\dfrac{-1+3i}{2}\cdot\dfrac{-1-3i}{2}\alpha^2=\dfrac{5}{2}\alpha^3$ ………⑥

⑤より $\alpha^2=\dfrac{2}{3}p$，⑥より $\alpha^3=\dfrac{2}{5}q$ なので，

$$\left(\frac{2}{3}p\right)^3=\left(\frac{2}{5}q\right)^2,\quad \frac{8}{27}p^3=\frac{4}{25}q^2,\quad 50p^3=27q^2$$

さらに，四角形 ABDC が正方形であるとき，D を表す複素数を δ とおくと，

$$\frac{\alpha+\delta}{2}=\frac{\beta+\gamma}{2}$$

①より，$\delta=(\beta+\gamma)-\alpha=-\alpha-\alpha=-2\alpha$

[解 説]

複素数平面の標準的な問題です。なお，最後の設問は，文脈と無関係に解くことができます。

第5問

問題のページへ

(1) まず，事象 A の起こる確率は $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ である。

さて，$X=a+1$ となるのは，5 回投げて事象 A が 1 回だけ起こる場合より，その確率は，${}_5C_1\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{80}{243}$ である。

(2) 4 回目でゲームが終了するのは，3 回目までに事象 A が 1 回だけ起こり，さらに 4 回目に 2 度目の A が起こる場合であり，その確率は，

$${}_3C_1\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\frac{1}{3}=\frac{4}{27}$$

また，5 回目でゲームが終了するのは，事象 A が一度も起こらない場合，A が一度だけ起こる場合, 5 回目に 2 度目の A が起こる場合のいずれかであり,

$$\left(\frac{2}{3}\right)^5+{}_5C_1\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^4+{}_4C_1\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^3\times\frac{1}{3}=\frac{16}{27}$$

よって, 4 回目または 5 回目でゲームが終了する確率は，$\frac{4}{27}+\frac{16}{27}=\frac{20}{27}$ である。

(3) 3 回目までに一度も事象 A が起こらない確率は，$\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27}$ である。

また，3 回目までに一度も事象 A が起こらず，しかも $X>a$ となるのは，A が 4 回目または 5 回目で起こる場合より，その確率は,

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3\times\left(\frac{1}{3}\times1+1\times\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\right)=\frac{8}{27}\times\frac{5}{9}$$

よって，3 回目までに一度も事象 A が起こらないとき，$X>a$ となる条件付き確率は，$\left(\frac{8}{27}\times\frac{5}{9}\right)\div\frac{8}{27}=\frac{5}{9}$ である。

(4) まず, X の値は $X=a-m$，$a+1$，$a+3$ のいずれかである。

$X=a-m$ となる確率は $\left(\frac{2}{3}\right)^5=\frac{32}{243}$，$X=a+1$ となる確率は，(1)より $\frac{80}{243}$，$X=a+3$ となる確率は，$1-\left(\frac{32}{243}+\frac{80}{243}\right)=\frac{131}{243}$ である。すると X の平均 $E(X)$ は,

$$E(X)=(a-m)\times\frac{32}{243}+(a+1)\times\frac{80}{243}+(a+3)\times\frac{131}{243}=a+\frac{473-32m}{243}$$

$E(X)>a$ となるのは，$473-32m>0$，$m<14+\frac{25}{32}$

よって，自然数 m の最大値は 14 である。

[解 説]

条件付き確率を求める設問以外は，数学Ⅰの内容です。ただ，問題文が長く，頭を整理するのに時間がかかります。

第6問

問題のページへ

(1) 140 行が実行されたとき, B は第 N 期末の預金残高を表し, もし $B>0$ であれば, 次の期間に進むことができるので, 150 行は,

```
150 IF B>0 THEN GOTO 130
```

(2) 第 N 期末に $B\leqq 0$ になるとき, 160 行が実行されるので, 最終期の初めに引き出すことのできる金額は, $\dfrac{B}{1.05}+M$ 万円となる。1 万円未満は切り捨てることより, 160 行は,

```
160 PRINT N,INT(B/1.05+M)
```

(3) $c_1=1.05(c_0-m)=1.05(2150-m)$ となり, $c_1-c_0\geqq 0$ とすると,

$$1.05(2150-m)\geqq 2150,\ m\leqq\frac{5\times 2150}{105}=102+\frac{8}{21}$$

よって, 自然数 m の最大値は 102 である。

(4) 120 行, 130 行において, 第 n 期初めの預金残高が m 万円という条件を設定している。次に, 140 行では, 1 期前の期間の初めにおける預金残高を計算しているので, 160 行は,

```
160 IF I>1 THEN GOTO 140
```

170 行は $I=1$ となったときに実行される。このとき, B は第 1 期初めに必要な預金額を表している。すると, この B より大きい最小の整数を b としたとき, b 万円を第 1 期初めに預金しておけば, 預金残高が n 期間にわたり 0 円にならない。これから 170 行は,

```
170 PRINT INT(B+1)
```

また, $n=3$, $m=90$ のとき, この条件のもとで, 140 行を 1 回実行すると, 第 2 期初めの預金残高が得られ,

$$B=\frac{90}{1.05}+90 \quad 175.7$$

さらに, 140 行をもう 1 回実行したとき, 第 1 期初めに必要な預金額が得られ,

$$B=\frac{175.7}{1.05}+90 \quad 257.3$$

このとき, $B+1 \quad 258.3$ となり, 小数部分を切り捨て, $[B+1]=258$ である。

よって, 170 行では 258 と出力され, 140 行は 2 回実行される。

[解 説]

問題文を読み, 内容を理解するのに 10 分以上かかってしまいました。また, 最後の小数計算も, 電卓なしでは乗り気になれません。