第１問（必答問題）

解答解説のページへ

[1] 座標平面上の 3 点 $\mathrm{A}(-1,\ 0)$，$\mathrm{B}(\cos\theta,\ \sin\theta)$，$\mathrm{C}(\cos 2\theta,\ \sin 2\theta)$ について，θ が $0° \leqq \theta \leqq 180°$ の範囲を動くとき，$d = \mathrm{AC} + \mathrm{BC}$ の最大値と最小値を求めよう。

(1) $\mathrm{AC}^2 = \boxed{\text{ア}} + 2\cos 2\theta = \boxed{\text{イ}}\cos^2\theta$，$\mathrm{BC}^2 = \boxed{\text{ウ}} - 2\cos\theta = \boxed{\text{エ}}\sin^2\dfrac{\theta}{2}$

であるから，$d = \boxed{\text{オ}}\,|\cos\theta| + \boxed{\text{カ}}\sin\dfrac{\theta}{2}$ である。

(2) $t = \sin\dfrac{\theta}{2}$ とおく。$0° \leqq \theta \leqq 90°$ のとき，$0 \leqq t \leqq \dfrac{\sqrt{\boxed{\text{キ}}}}{\boxed{\text{ク}}}$ であり，

$d = -\boxed{\text{ケ}}\,t^2 + \boxed{\text{コ}}\,t + 2$ である。$90° \leqq \theta \leqq 180°$ のとき，$\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{キ}}}}{\boxed{\text{ク}}} \leqq t \leqq 1$

であり，$d = \boxed{\text{ケ}}\,t^2 + \boxed{\text{コ}}\,t - 2$ である。

したがって，d は $t = \dfrac{\sqrt{\boxed{\text{サ}}}}{\boxed{\text{シ}}}$ のとき最小値 $\sqrt{\boxed{\text{ス}}}$ をとり，このときの θ の値は $\boxed{\text{セソ}}°$ である。また，d は $t = \boxed{\text{タ}}$ のとき最大値 $\boxed{\text{チ}}$ をとり，このときの θ の値は $\boxed{\text{ツテト}}°$ である。

[2] $x,\ y,\ z$ は正の数で $2^x = \left(\dfrac{5}{2}\right)^y = 3^z$ を満たしているとする。このとき，$a = 2x$，$b = \dfrac{5}{2}y$，$c = 3z$ とおき，$a,\ b,\ c$ の大小関係を調べよう。

(1) $x = y\left(\log_2 \boxed{\text{ナ}} - \boxed{\text{ニ}}\right)$ であるから，

$$b - a = y\left(\frac{\boxed{\text{ヌ}}}{2} - 2\log_2 \boxed{\text{ナ}}\right)$$

である。したがって，a と b を比べると $\boxed{\text{ネ}}$ の方が大きい。

(2) $x = z\log_2 \boxed{\text{ノ}}$ であるから，$c - a = z\left(3 - 2\log_2 \boxed{\text{ノ}}\right)$ である。したがって，a と c を比べると $\boxed{\text{ハ}}$ の方が大きい。

(3) $3^5 < \left(\dfrac{5}{2}\right)^6$ であることを用いると，$a,\ b,\ c$ の間には大小関係

$$\boxed{\text{ヒ}} < \boxed{\text{フ}} < \boxed{\text{ヘ}}$$

が成り立つことがわかる。

第２問（必答問題）

解答解説のページへ

a を定数とし，放物線 $y=x^2+2ax-a^3-2a^2$ を C，その頂点を P とする。

(1)　頂点 P の座標は，$\left(\boxed{\text{アイ}},\ -a^{\boxed{\text{ウ}}}-\boxed{\text{エ}}\,a^2\right)$である。したがって，どのような定数 a についても，頂点 P は $y=x^{\boxed{\text{オ}}}-\boxed{\text{カ}}\,x^2$ のグラフ上にある。

(2)　a が $-3\leqq a<1$ の範囲を動くとする。頂点 P の y 座標の値が最大になるのは $a=\boxed{\text{キ}}$ と $a=\boxed{\text{クケ}}$ のときであり，最小となるのは $a=\boxed{\text{コサ}}$ のときである。

(3)　a の値を(2)で求めた $\boxed{\text{キ}}$，$\boxed{\text{クケ}}$，$\boxed{\text{コサ}}$ とするときの放物線 C をそれぞれ C_1，C_2，C_3 とする。放物線 C_2，C_3 の方程式は，

$$C_2: y=x^2-\boxed{\text{シ}}\,x+\boxed{\text{ス}},\quad C_3: y=x^2-\boxed{\text{セ}}\,x$$

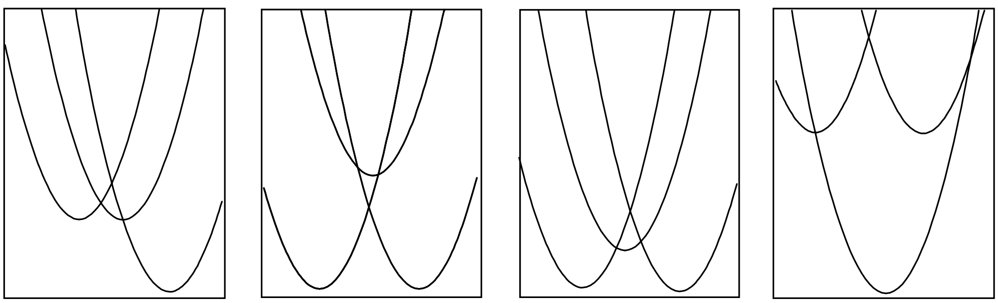
である。

このとき，C_1 と C_2 の交点の x 座標は $\dfrac{\boxed{\text{ソ}}}{2}$，$C_1$ と C_3 の交点の x 座標は $\boxed{\text{タ}}$，C_2 と C_3 の交点の x 座標は $\dfrac{\boxed{\text{チ}}}{2}$ である。

(4)　C_1，C_2，C_3 を座標平面上に図示したとき，それらの位置関係を表す最も適当なものは，下の図⓪～③のうち $\boxed{\text{ツ}}$ である。ただし，座標軸や曲線名は省略してある。

3 つの放物線 C_1，C_2，C_3 で囲まれた図形の面積は $\dfrac{\boxed{\text{テト}}}{\boxed{\text{ナ}}}$ である。

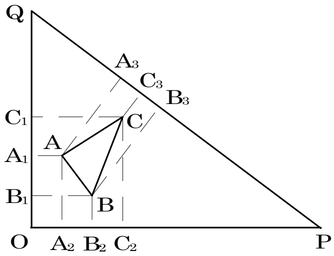
⓪　①　②　③



第３問（選択問題）

解答解説のページへ

座標平面上の 3 点O(0, 0)，P(4, 0)，Q(0, 3) を頂点とする三角形 OPQ の内部に三角形 ABC があるとする。A, B, C から直線 OQ に引いた垂線と OQ との交点をそれぞれ A_1，B_1，C_1 とする。A, B, C から直線 OP に引いた垂線と OP との交点をそれぞれ A_2，B_2，C_2 とする。A, B, C から直線 PQ に引いた垂線と PQ との交点をそれぞれ A_3，B_3，C_3 とする。



A_1が線分B_1C_1の中点であり，B_2が線分A_2C_2の中点であり，C_3が線分A_3B_3の中点であるとする。

$\overrightarrow{AB}=(x,\ y)$，$\overrightarrow{AC}=(z,\ w)$とおく。$A_1$が線分$B_1C_1$の中点であるから $w=\boxed{ア}\,y$ である。B_2が線分A_2C_2の中点であるから $z=\boxed{イ}\,x$ である。線分 AB の中点を D とすると，C_3が線分A_3B_3の中点であるから，$\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{PQ}=\boxed{ウ}$である。また，$\overrightarrow{PQ}=\left(\boxed{エオ},\ \boxed{カ}\right)$，$\overrightarrow{CD}=\dfrac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}\left(\overrightarrow{AB}-\boxed{ケ}\,\overrightarrow{AC}\right)$であるから，

$y=\dfrac{\boxed{コサ}}{\boxed{シ}}x$ である。したがって，

$$\overrightarrow{AB}=x\left(1,\ \frac{\boxed{コサ}}{\boxed{シ}}\right),\ \overrightarrow{AC}=x\left(\boxed{イ},\ \frac{\boxed{ス}}{\boxed{セ}}\right)$$

である。ゆえに，$AC=\dfrac{\boxed{ソ}\sqrt{\boxed{タチ}}}{\boxed{ツ}}AB$，$\cos\angle BAC=\dfrac{\sqrt{\boxed{テト}}}{\boxed{ナニ}}$ である。

第４問（選択問題）

解答解説のページへ

2 つの複素数 p, q と 3 つの異なる複素数α，β，γ は

$$\alpha+\beta+\gamma=0 \cdots\cdots ①,\quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=p \cdots\cdots ②,\quad \alpha\beta\gamma=q \cdots\cdots ③$$

を満たすとする。複素数α，β，γ が複素数平面上で表す点をそれぞれ A, B, C とし，三角形 ABC は，AB = AC の直角二等辺三角形であるとする。

このとき，$\arg\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\pm\boxed{\text{アイ}}^\circ$，$\left|\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right|=\boxed{\text{ウ}}$である。ここで，複素数 z の偏角 $\arg z$ は $-180^\circ \leqq \arg z < 180^\circ$ を満たすとする。

以下，$\arg\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\boxed{\text{アイ}}^\circ$ であるとする。このとき，①を用いると

$$\beta=\frac{\boxed{\text{エオ}}+\boxed{\text{カ}}\,i}{\boxed{\text{キ}}}\alpha,\quad \gamma=\frac{\boxed{\text{クケ}}-\boxed{\text{コ}}\,i}{\boxed{\text{サ}}}\alpha$$

である。

さらに，②，③から，$p=\dfrac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}\alpha^{\boxed{\text{セ}}}$，$q=\dfrac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}}\alpha^{\boxed{\text{チ}}}$ である。したがって，p と q は，$\boxed{\text{ツテ}}\,p^{\boxed{\text{ト}}}=\boxed{\text{ナニ}}\,q^{\boxed{\text{ヌ}}}$ を満たさなければならない。

さらに，複素数平面上に点 D があり，四角形 ABDC が正方形であるとき，D を表す複素数は$\boxed{\text{ネノ}}\,\alpha$ である。

第5問（選択問題）

解答解説のページへ

さいころを最大5回まで投げ，目の出方に応じてポイントを得る次のゲームをDさんが行う。Dさんは最初 a ポイントをもっている。

さいころを投げて，5または6の目が出る事象を A とする。事象 A が初めて起こった時点では1ポイントを得て引き続きゲームを続行し，2度目に事象 A が起これば，2ポイントが加算されて合計 3 ポイントを得て，その時点でゲームを終了する。なお，さいころを5回投げても，事象 A が一度しか起こらない場合には，1度目に得た1ポイントのままで終了する。もし 5 回投げても，事象 A が一度も起こらない場合には，あらかじめ定めた m ポイントが減点されて終了する。ただし，a と m は自然数で，$a \geqq m$ とする。

このゲームが終了した時点でのDさんのもつポイント数を確率変数 X とする。

(1)　$X = a + 1$ となる確率は $\dfrac{\boxed{\text{アイ}}}{243}$ である。

(2)　ちょうど 4 回目でゲームが終了する確率は $\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エオ}}}$ であり，終了する時点が 4 回目または5回目となる確率は $\dfrac{\boxed{\text{カキ}}}{\boxed{\text{クケ}}}$ である。

(3)　3回目までに一度も事象 A が起こらない確率は $\dfrac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サシ}}}$ である。

また，3回目までに一度も事象 A が起こらないとき，$X > a$ となる条件付き確率は $\dfrac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}$ である。

(4)　確率変数 X の平均(期待値)は，$E(X) = a + \dfrac{\boxed{\text{ソタチ}} - \boxed{\text{ツテ}}\,m}{243}$ で，$E(X) > a$ となるような最大の自然数 m は $\boxed{\text{トナ}}$ である。

第６問（選択問題）

解答解説のページへ

ある銀行では毎期末に預金残高に対し 5%の利率で利息がつく。この銀行に，たとえば a 万円を一定期間預金すると，期末には$1.05 \times a$ 万円の預金残高になることになる。

第 1 期の初めに, A さんはこの銀行に b 万円の預金を持っている。A さんは，まず b 万円から第 1 期分 m 万円を引き出す。残りの預金に対し第 1 期末に 5%の利息がつく。ここで，$b>m$ とする。第 2 期目からも毎期初めにこの預金から m 万円ずつを引き出す予定である。ただし，預金残高が m 万円に満たないときには，その全額を引き出すものとする。

以下の問題中, **INT(X)**は **X** を超えない最大の整数を表す関数である。

(1) 預金残高が 0 円になるのに何期間を要するかを調べるため，次の〔プログラム 1〕を作った。このプログラムでは，自然数 b と m を与えるとき，第 n 期初めに預金を引き出した直後に預金残高が 0 円になれば，そのときの自然数 n を出力する。

〔プログラム 1〕

```
100  INPUT  "B="; B
110  INPUT  "M="; M
120  N=0
130  N=N+1
140  B=1.05*(B-N)
150  IF  B>0  THEN  GOTO  [アイウ]
160  PRINT  N
170  END
```

このプログラムの空欄$\boxed{\text{アイウ}}$をうめて，プログラムを完成せよ。

(2) このプログラムの 160 行を変更して，最終期の引き出し金額の 1 万円未満を切り捨てたものも出力するようにするには，160 行を$\boxed{\text{エ}}$と変更すればよい。ただし，この金額の単位は万円とする。また，$\boxed{\text{エ}}$については，当てはまるものを，次の⓪～⑤から 1 つ選べ。

⓪ **PRINT N,INT(B)**　① **PRINT N,INT(B+M)**
② **PRINT N,INT(B-M)**　③ **PRINT N,INT(1.05*B)**
④ **PRINT N,INT(B/1.05+M)**　⑤ **PRINT N,INT(B/1.05-M)**

(3) 第 1 期初めの預金額を 2150 万円，引き出し額を 100 万円とすると，第 1 期末の預金残高は，約 2152 万円となり，第 1 期初めの 2150 万円より増える。

一般に，毎期の初めに m 万円引き出すものとし，第 n 期末の預金残高をc_n万円とする。このとき，$c_{n+1}=1.05(c_n-m)$であるので,

$$c_{n+1}-c_n=1.05(c_n-c_{n-1}),\ \ n=1,\ 2,\ \cdots$$

が成り立つ。ただし，$c_0=2150$ とする。

よって，$c_1-c_0\geqq 0$ ならば，預金残高は減少しないことがわかる。ここで，c_1 は m と c_0 によって決まり，$c_1-c_0\geqq 0$ を満たす最大の自然数 m は $\boxed{\text{オカキ}}$ である。

(4)　次に，A さんの預金残高が n 期間にわたり 0 円にならないために必要な第 1 期初めの預金額 b 万円を計算するため，次の〔プログラム 2〕を作った。このプログラムでは，自然数 n と m を与えるとき，預金残高が n 期間にわたり 0 円にならないために必要な第 1 期初めの預金額 b 万円を計算する。ただし，$n\geqq 2$ とする。

〔プログラム 2〕

```
100  INPUT  "N=";  N
110  INPUT  "M=";  M
120  I=N
130  B=M
140  B=B/1.05+M
150  I=I-1
160  IF  I>1  THEN  GOTO  [クケコ]
170  PRINT  [ サ ]
180  END
```

このプログラム空欄 $\boxed{\text{クケコ}}$ と $\boxed{\text{サ}}$ をうめて，このプログラムを完成せよ。ただし，$\boxed{\text{サ}}$ については，当てはまるものを，次の⓪～④から 1 つ選べ。

⓪　**INT(B)**　　①　**INT(B/1.05)**　　②　**INT(B/1.05+1)**

③　**INT(B+1)**　　④　**INT((B+1)/1.05)**

このプログラムを実行して **N=?** に対し 3，**M=?** に対し 90 を入力したとき，170 行において $\boxed{\text{シスセ}}$ と出力される。このとき，140 行は $\boxed{\text{ソ}}$ 回実行される。