第１問 [1]

問題のページへ

(1) G: $y=x^2-2(a+2)x+a^2-a+1$……(＊)に対して, y 切片 Y は,

$$Y=a^2-a+1=\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$$

よって，$a=\frac{1}{2}$ のとき, Y は最小値 $\frac{3}{4}$ をとる。

このとき, (＊)は $y=x^2-5x+\frac{3}{4}$ より, x 軸との交点は,

$$x^2-5x+\frac{3}{4}=0,\quad x=\frac{5\pm\sqrt{22}}{2}$$

(2) (＊)より，$y=\{x-(a+2)\}^2-(a+2)^2+a^2-a+1=\{x-(a+2)\}^2-5a-3$

G が y 軸に関して対称になるのは，$a+2=0$，$a=-2$ より,

$$G_1: y=x^2+7$$

G が x 軸に接するのは，$-5a-3=0$，$a=-\frac{3}{5}$ より,

$$G_2: y=\left(x-\frac{7}{5}\right)^2$$

すると，G_1 の頂点 $(0,\ 7)$，G_2 の頂点 $\left(\frac{7}{5},\ 0\right)$ となり，G_1 を x 軸方向に $\frac{7}{5}$, y 軸方向に -7 だけ平行移動すると G_2 に重なる。

[解 説]

穏やかな問題からスタートです。計算量も例年よりは少なめです。

第１問 [2]

問題のページへ

(1) $C: y=x^2-\dfrac{b-2}{a}$ が x 軸と共有点をもたないのは，$-\dfrac{b-2}{a}>0$ のときであり，$a>0$ から $b-2<0$，すなわち $b=1$ のときである。

よって，この確率は，$\dfrac{6\times1}{6^2}=\dfrac{1}{6}$ である。

共有点の個数が 1 個となるのは，$-\dfrac{b-2}{a}=0$ すなわち $b=2$ のときであり，この確率は，$\dfrac{6\times1}{6^2}=\dfrac{1}{6}$ である。

C と x 軸との共有点の個数は 2 個以下なので，これが 2 個となる確率は，

$$1-\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\right)=\frac{2}{3}$$

(2) C と x 軸との共有点の個数の期待値は，

$$0\times\frac{1}{6}+1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{2}{3}=\frac{3}{2}$$

(3) C と x 軸との共有点は, $b\geqq2$ において，$x=\pm\sqrt{\dfrac{b-2}{a}}$ ………(＊)

(＊)が整数となるのは，$b-2=0$ または $1\leqq a\leqq b-2\leqq4$ に注意して，

$$(a,\ b-2)=(1,\ 0),\ (2,\ 0),\ (3,\ 0),\ (4,\ 0),\ (5,\ 0),\ (6,\ 0),$$
$$(1,\ 1),\ (2,\ 2),\ (3,\ 3),\ (1,\ 4),\ (4,\ 4)$$

これより，$(a,\ b)$ の組は 11 個存在し，この確率は $\dfrac{11}{6^2}=\dfrac{11}{36}$ である。

[解 説]

2 次関数との融合問題ですが，内容は平易です。(3)では，$x=0$ を数え忘れないことが重要です。もっとも解答枠から気付きますが。

第２問 [1]

問題のページへ

A を B で割った商 Q, 余り R は,
右の組立除法より,

$$Q = x^2 + x + a^2$$
$$R = (a+b)x + a^3 + b^3$$

	1	0	a^2-a-1	$-a^2+b$	b^3
a			a	a	a^3
1		1	1	a^2	
	1	1	a^2	$a+b$	a^3+b^3

(1)　$R = x+7$ のとき,

$a+b=1$ ………①,　$a^3+b^3=7$ ………②

①より $b=1-a$ となり, ②に代入して, $a^3+(1-a)^3=7$

$a^2-a-2=0$, $a=2,\ -1$

(2)　(i)　すべての実数 x に対して $Q>0$ となる条件は,

$D=1-4a^2<0$, $(2a-1)(2a+1)>0$, $a<-\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{2}<a$

よって, $a<-\dfrac{1}{2}$ は, すべての実数 x に対して $Q>0$ となるための, 十分条件であるが必要条件ではない。

(ii)　A が B で割り切れるための条件は,

$a+b=0$ ………③,　$a^3+b^3=0$ ………④

③より $b=-a$ となり, ④は $a^3+(-a)^3=0$ から, つねに成り立ち, ③かつ④は③と同値である。

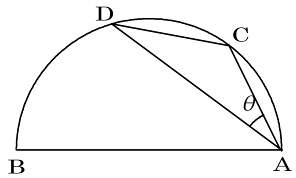
よって, $a+b=0$ は, A が B で割り切れるための, 必要十分条件である。

[解 説]

除法についての等式をたて, Q と R を係数比較で求めても OK です。また, (2)で, 久々に 4 択問題が出ましたが, 引っ掛けるような内容ではありませんでした。

第２問 [2]

問題のページへ



$\angle\mathrm{CAD}=\theta$ とおくと，$\dfrac{1}{\cos^2\theta}=1+\tan^2\theta=\dfrac{5}{4}$ から，

$$\cos^2\theta=\frac{4}{5},\ \cos\theta=\sqrt{\frac{4}{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}\quad(0°<\theta<90°)$$

ここで，△ADC に余弦定理を適用して，

$$\mathrm{CD}^2=(2\sqrt{5})^2+8^2-2\cdot2\sqrt{5}\cdot8\cdot\frac{2\sqrt{5}}{5}=20$$

よって，$\mathrm{CD}=2\sqrt{5}$

さて，$\sin\theta=\tan\theta\cdot\cos\theta=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ より，$\triangle\mathrm{ADC}=\dfrac{1}{2}\cdot8\cdot2\sqrt{5}\cdot\dfrac{\sqrt{5}}{5}=8$

また，△ADC の外接円の半径を R とすると，正弦定理より，

$$\frac{2\sqrt{5}}{\frac{\sqrt{5}}{5}}=2R,\ \mathrm{AB}=2R=10$$

[解 説]

記憶にないほど基本的な問題です。このようなときは，爆弾のような設問が最後に置かれている，というのが通例だったのですが。

第３問

問題のページへ

(1)　$a_1 = S_1 = -1^2 + 24 = 23$ であり, $n \geqq 2$ において,

$$a_n = S_n - S_{n-1} = (-n^2 + 24n) - \{-(n-1)^2 + 24(n-1)\} = -2n + 25$$

この式は $n = 1$ のときも成立する。これより，数列 $\{a_n\}$ は公差 -2 の等差数列であり，$a_2 = 21$ となる。

また，$a_n < 0$ となるのは，$-2n + 25 < 0$ より，$n \geqq 13$ である。

ここで，$a_{12} = 1$，$a_{13} = -1$，$a_{40} = -55$ なので,

$$\sum_{k=1}^{40} |a_k| = \sum_{k=1}^{12} a_k + \sum_{k=13}^{40} (-a_k) = \frac{23+1}{2} \times 12 - \frac{-1-55}{2} \times 28 = 928$$

(2)　(i)　$b_k = 3^{k-1}$ より，$b_1 = 1$，$b_2 = 3$，$b_3 = 9$，$b_4 = 27$，$b_5 = 81$，…となる。

$b_k \leqq 10$ を満たす最大の b_k は b_3 より，$c_{10} = b_3 = 9$

$c_n = 27 = b_4$ となる n の値は $27 \leqq n \leqq 80$ より，全部で $80 - 27 + 1 = 54$ 個ある。

(ii)　$c_n = b_1 = 1$ となる n の値は $1 \leqq n \leqq 2$ より，$c_1 = c_2 = 1$

$c_n = b_2 = 3$ となる n の値は $3 \leqq n \leqq 8$ より，$c_3 = c_4 = \cdots = c_8 = 3$

$c_n = b_3 = 9$ となる n の値は $9 \leqq n \leqq 26$ より，$c_9 = c_{10} = \cdots = c_{26} = 9$

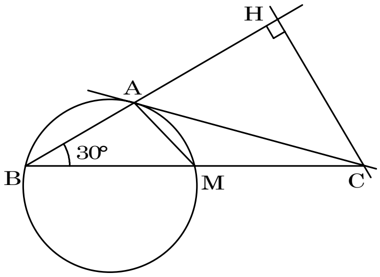
(i)と合わせて，$\displaystyle\sum_{k=1}^{30} c_k = 1 \times 2 + 3 \times 6 + 9 \times 18 + 27 \times 4 = 290$

[解 説]

(2)は題意を把握するのに時間がかかります。このようなときは, n に 1, 2, 3, …と具体的な数値を代入し, 実験していくことが有効です。

第4問

問題のページへ



直角三角形 HBC について，$\angle HBC = 30°$ より，

$$BC = 2CH \cdots\cdots\cdots ①$$

一方，接弦定理より，$\angle MAC = \angle ABC$ となり，

$$\triangle MAC \backsim \triangle ABC$$

よって，$MC : AC = AC : BC$ から，

$$AC^2 = MC \cdot BC$$

ここで, M は BC の中点より，

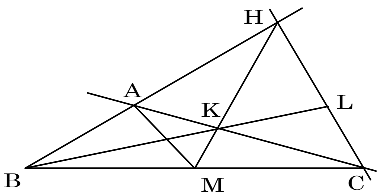
$$AC^2 = \frac{BC}{2} \cdot BC = \frac{1}{2} BC^2 \cdots\cdots\cdots ②$$

①②より，$AC^2 = \frac{1}{2} \cdot 4CH^2 = 2CH^2$，$AC = \sqrt{2}\, CH$

したがって，△HAC は直角二等辺三角形であり，

$$\angle AMB = \angle MAH - \angle ABM = (30° + 45°) - 30° = 45°$$

さて，点 K, L を題意のように定めると，



$$\triangle HBK : \triangle BCK = HL : LC \cdots\cdots\cdots ③$$

$$\triangle CHK : \triangle BCK = HA : AB \cdots\cdots\cdots ④$$

さらに M は BC の中点より，$\triangle HBK = \triangle CHK$ であるので，③④から，

$$HL : LC = HA : AB$$

よって, $AL \mathbin{/\!/} BC$ となり，$\triangle HAL \backsim \triangle HBC$

以上より，$\triangle HAL : \triangle HBC = HA^2 : HB^2 = HC^2 : (\sqrt{3}\,HC)^2 = 1 : 3$

[解 説]

来年，出題されても違和感のない問題で，なめらかに最後の設問まで流れていきます。方べきの定理やチェバの定理に誘導がついているのも，その現れでしょうか。

第5問

問題のページへ

(1) 9 以下の自然数 N に対して, A, B, C は, $1 \leqq A \leqq N$, $1 \leqq B \leqq N$, $1 \leqq C \leqq N$ を満たし, 140 行から B が奇数, 150 行から $A \neq B$, 170 行から $C \neq A$, 180 行から $C \neq B$ と条件づけられている。このとき, 百の位の数を A, 十の位の数を B, 一の位の数を C とする 3 桁の数を小さい順に表示するプログラムである。

ここで, $N = 3$ のとき, 奇数 B は $B = 1$ または $B = 3$ となり, $B = 1$ のとき表示される 3 桁の数は 213, 312 であり, $B = 3$ のとき 132, 231 である。

よって, 3 桁の数は 4 個表示され, 2 番目に表示されるのは 213 である。

(2) $N = 5$ のとき, 奇数 B は $B = 1$, 3, 5 となる。

ここで, 150 行は B が奇数のときに A と B が等しいかどうかを判断する行であるので, $3 \times 5 = 15$ 回実行される。

このとき, 小さい順に表示される 3 桁の数は,

132, 134, 135, 152, 153, 154, 213, ……

これから, 213 は 7 番目である。

(3) プログラムを書き直したとき, 160 行から $B \leqq C \leqq N$, 180 行から C は B の倍数ではないという条件が追加される。すなわち, 十の位の数は奇数, 一の位の数は十の位の数以上でその倍数ではなく, しかも各位の数はすべて異なる 3 桁の数を, 小さい順に表示するプログラムとなる。

すると, $N = 7$ のとき, 最大数は 756 である。また 300 以上 500 以下の数は, 356, 357, 435, 437, 456, 457 から 6 個表示される。

[解 説]

3 重のループがプログラムに入っています。数学ⅠA のコンピュータ問題は, 1997 年に初登場したのですが, ずいぶん難化しました。