第１問[1]

問題のページへ

不等式 $\log_2(x-1)+\log_{\frac{1}{2}}(3-x)\leqq 0$ ……(＊)に対して，$x-1>0$ かつ $3-x>0$ より，

$1<x<3$ ………①

また(＊)より，$\log_2(x-1)+\dfrac{\log_2(3-x)}{\log_2 2^{-1}}\leqq 0$，$\log_2(x-1)-\log_2(3-x)\leqq 0$

$\log_2(x-1)\leqq\log_2(3-x)$，$x-1\leqq 3-x$，$x\leqq 2$ ………②

①②より，$1<x\leqq 2$

すると，$2^1<2^x\leqq 2^2$ より，$2<X\leqq 4$ であり，

$y=4^x-6\cdot 2^x+10=X^2-6X+10=(X-3)^2+1$

よって，y は $X=4$ $(x=2)$ で最大値 2 をとり，$X=3$ $(x=\log_2 3)$ で最小値 1 をとる。

[解 説]

基本題です。例年より簡単です。

第１問[2]

問題のページへ

(1) $\sin(\theta-a)-\sin\theta=0$ より，$\sin(\theta-a)=\sin\theta$

ここで，$-180°<\theta-a<180°$，$0°\leqq\theta\leqq180°$，$\theta-a<\theta$ より，

$$\theta-a=180°-\theta\,,\ \theta=90°+\frac{a}{2}$$

このとき，$\sin(\theta-a)=\dfrac{1}{2}$ より，$\sin\left(90°-\dfrac{a}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$，$\cos\dfrac{a}{2}=\dfrac{1}{2}$

$0°<\dfrac{a}{2}<90°$ から，$\dfrac{a}{2}=60°$，$a=120°$

(2) $a=120°$ のとき，

$$f(\theta)=\sin(\theta-120°)-\sin\theta=\sin\theta\cos120°-\cos\theta\sin120°-\sin\theta$$
$$=-\frac{3}{2}\sin\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta=-\sqrt{3}\sin(\theta+30°)$$

$30°\leqq\theta+30°\leqq210°$ より，関数 $f(\theta)$ は $\theta+30°=210°$ $(\theta=180°)$ のとき最大値 $-\sqrt{3}\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ をとり，$\theta+30°=90°$ $(\theta=60°)$ のとき最小値 $-\sqrt{3}\times1=-\sqrt{3}$ をとる。

[解 説]

方程式は因数分解からという基本に従えば，和積公式の利用でしょうが，出題者の意図は，たぶん上の解法でしょう。

第２問

問題のページへ

(1)　直線 l は，$a \neq 1$ より，$y-4a^2=\dfrac{4a^2-(a+1)}{2a-(a+1)}(x-2a)=(3a+1)(x-2a)$

$$y=(3a+1)(x-2a)+4a^2=(3a+1)x-2a^2-2a \cdots\cdots\cdots ①$$

同様にして，直線 m は，$y=(3b+1)x-2b^2-2b \cdots\cdots\cdots ②$

①②の交点は，$(3a+1)x-2a^2-2a=(3b+1)x-2b^2-2b$

$$3(a-b)x=2(a^2-b^2)+2(a-b)$$

$b \neq a$ より，$3x=2(a+b)+2$，$x=\dfrac{2}{3}(a+b+1)$

①に代入して，$y=(3a+1)\cdot\dfrac{2}{3}(a+b+1)-2a^2-2a=2ab+\dfrac{2}{3}(a+b+1)$ より，

$$\mathrm{T}\left(\frac{2}{3}(a+b+1),\ 2ab+\frac{2}{3}(a+b+1)\right)$$

$b \to a$ のとき，$\dfrac{2}{3}(a+b+1)\to\dfrac{4}{3}a+\dfrac{2}{3}$，$2ab+\dfrac{2}{3}(a+b+1)\to 2a^2+\dfrac{4}{3}a+\dfrac{2}{3}$ より，

$$\mathrm{U}\left(\frac{4}{3}a+\frac{2}{3},\ 2a^2+\frac{4}{3}a+\frac{2}{3}\right)$$

(2)　点 $\mathrm{U}(x,\ y)$ とすると, (1)より，$x=\dfrac{4}{3}a+\dfrac{2}{3} \cdots\cdots ③$，$y=2a^2+\dfrac{4}{3}a+\dfrac{2}{3} \cdots\cdots ④$

③より $a=\dfrac{1}{4}(3x-2)$ となり，④に代入して，

$$D: y=2\cdot\frac{1}{16}(3x-2)^2+x=\frac{9x^2-4x+4}{8} \cdots\cdots\cdots ⑤$$

$y'=\dfrac{1}{4}(9x-2)$ より，$x=\dfrac{4}{3}a+\dfrac{2}{3}$ のとき $y'=\dfrac{9}{4}\left(\dfrac{4}{3}a+\dfrac{2}{3}\right)-\dfrac{1}{2}=3a+1$ となり，点 U における接線の傾きは $3a+1$ となる。

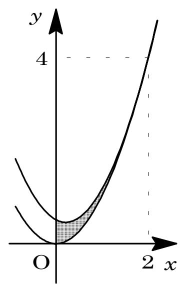
また, ⑤の原点を通る接線を $y=mx$ とおくと，⑤と連立して，

$$\frac{9x^2-4x+4}{8}=mx,\quad 9x^2-(4+8m)x+4=0$$

重解をもつことより，$D/4=(2+4m)^2-36=0$ から，$m=1,\ -2$ である。

(3)　$C: y=x^2$ と D との共有点は，$x^2=\dfrac{9x^2-4x+4}{8}$ より，

$x=2$ となり，その座標は $(2,\ 4)$ である。



また, 右図の網点部の面積 S は,

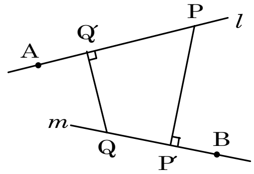
$$S=\int_0^2\left(\frac{9x^2-4x+4}{8}-x^2\right)dx=\frac{1}{8}\int_0^2(x-2)^2dx$$
$$=\frac{1}{24}\Big[(x-2)^3\Big]_0^2=\frac{1}{3}$$

[解 説]

盛りだくさんの出題です。なお, (2)の後半は，誘導を無視しました。

第3問

問題のページへ



(1) $\vec{u}=(1,\ 1,\ 0)$，$\vec{v}=(1,\ 0,\ 1)$ より，$|\vec{u}|=|\vec{v}|=\sqrt{2}$，

$\vec{u}\cdot\vec{v}=1$ となり，また $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(0,\ 5,\ -2)$ である。

$$\overrightarrow{\mathrm{PP'}}=\overrightarrow{\mathrm{AP'}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t'\vec{v}-t\vec{u}$$

さて，$\overrightarrow{\mathrm{PP'}}\cdot\vec{v}=0$ より，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\vec{v}+t'|\vec{v}|^2-t\vec{u}\cdot\vec{v}=0$

よって，$-2+2t'-t=0$ となるので，

$$t'=1+\frac{1}{2}t$$

このとき，$\overrightarrow{\mathrm{PP'}}=(0,\ 5,\ -2)+t'(1,\ 0,\ 1)-t(1,\ 1,\ 0)=(t'-t,\ 5-t,\ -2+t')$

$$=\left(1-\frac{1}{2}t,\ 5-t,\ -1+\frac{1}{2}t\right)=\frac{1}{2}(2-t,\ 10-2t,\ -2+t)$$

また，$\overrightarrow{\mathrm{QQ'}}=-\overrightarrow{\mathrm{AB}}-s\vec{v}+s'\vec{u}=(-s+s',\ -5+s',\ 2-s)$ で，$\overrightarrow{\mathrm{QQ'}}\cdot\vec{u}=0$ より，同様にすると $s'=\frac{5}{2}+\frac{1}{2}s$ となり，これより $\overrightarrow{\mathrm{QQ'}}=\left(\frac{5}{2}-\frac{1}{2}s,\ -\frac{5}{2}+\frac{1}{2}s,\ 2-s\right)$

(2) $\mathrm{PP'}=\mathrm{QQ'}$ から，$\mathrm{QP'}=\mathrm{PQ'}$ となるので，$|\overrightarrow{\mathrm{PQ'}}|=|\overrightarrow{\mathrm{QP'}}|$ より，

$$|s'-t||\vec{u}|=|t'-s||\vec{v}|,\quad \sqrt{2}\left|\frac{5}{2}+\frac{1}{2}s-t\right|=\sqrt{2}\left|1+\frac{1}{2}t-s\right|$$

よって，$|5+s-2t|=|2+t-2s|$

(i) $5+s-2t=-(2+t-2s)$ のとき　$s=7-t$

(ii) $5+s-2t=2+t-2s$ のとき　$s=-1+t$

(3) $s=7-t$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{QQ'}}=\frac{1}{2}(-2+t,\ 2-t,\ -10+2t)$

$\overrightarrow{\mathrm{PP'}}\perp\overrightarrow{\mathrm{QQ'}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{PP'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QQ'}}=0$ なので，

$$(2-t)(-2+t)+(10-2t)(2-t)+(-2+t)(-10+2t)=0$$

$t^2-8t+12=0$ より，$t=2,\ 6$

また，$s=-1+t$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{QQ'}}=\frac{1}{2}(6-t,\ -6+t,\ 6-2t)$

同様にすると，$t^2-8t+20=0$ となり，実数 t は存在しない。

[解 説]

問題文を読み飛ばさずに，順を追って計算を進めると，10 分程度では終わりそうにありません。新傾向でしょうか。

第４問

問題のページへ

(1)　まず, w が線分 $\mathrm{A_0A_1}$ を $a:(1-a)$ に内分しているとき, $w=az+1-a$

また, w が線分 $\mathrm{A_2A_3}$ を $b:(1-b)$ に内分しているとき, $w=bz^3+(1-b)z^2$

$$bz^3+(1-b)z^2=az+1-a,\ bz^3+(1-b)z^2-az+a-1=0$$

よって, $(z-1)(bz^2+z+1-a)=0$ となり, z は実数ではないので,

$$bz^2+z+1-a=0\cdots\cdots\cdots①$$

a, b は実数より, ①は z と $\overline{z}$ を解にもつ。

$$z+\overline{z}=-\frac{1}{b}\cdots\cdots\cdots②,\ z\overline{z}=\frac{1-a}{b}\cdots\cdots\cdots③$$

②より, $2x=-\dfrac{1}{b}$, $b=-\dfrac{1}{2x}$

③より, $x^2+y^2=\dfrac{1-a}{b}$, $a=1-b(x^2+y^2)=1+\dfrac{x^2+y^2}{2x}$

$0<a<1$, $0<b<1$ より,

$$0<1+\frac{x^2+y^2}{2x}<1\cdots\cdots\cdots④,\ 0<-\frac{1}{2x}<1\cdots\cdots\cdots⑤$$

⑤より $0>\dfrac{1}{2x}>-1$ から, $x<0$ となり, $1<-2x$, $x<-\dfrac{1}{2}$

④より, $0>2x+x^2+y^2>2x$ となるが, $x^2+y^2>0$ は $y\neq 0$ より成立するので, $2x+x^2+y^2<0$ から, $(x+1)^2+y^2<1$

(2)　(1)より, $w=az+1-a$ なので, $wz=az^2+(1-a)z$

また, $w=bz^3+(1-b)z^2$ なので, $wz=bz^4+(1-b)z^3$

よって, (1)の条件, すなわち $0<a<1$, $0<b<1$ を満たすとき, 線分 $\mathrm{A_1A_2}$ と線分 $\mathrm{A_3A_4}$ とは wz で表される両端以外の点で交わる。

[解 説]

前問ほどではないにせよ, 途中の結果が問題文中に書かれており, スタートするまでに時間がかかります。これも新傾向でしょうか。

第５問

問題のページへ

(1) 硬貨を投げて表が出たとき，目の和が 3 の倍数になる場合は，和 3(1＋2, 2＋1)が 2 通り，和 6(1＋5, 2＋4, 3＋3, 4＋2, 5＋1)が 5 通り，和 9(3＋6, 4＋5, 5＋4, 6＋3)が 4 通り，和 12(6＋6)が 1 通り，合わせて 12 通りある。

硬貨を投げて裏が出たとき，目の和が 3 の倍数になる場合は，和 3(1＋2)が 2 通り，和 6(3＋3, 4＋2, 5＋1)が 2＋2＋1 の 5 通り，和 9(5＋4, 6＋3, 8＋1)が 1＋2＋1 の 4 通り，和 12(8＋4)が 1 通り，合わせて 12 通りある。

よって，目の和が 3 の倍数になる確率は，$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{12}{36}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{12}{36}=\dfrac{1}{3}$

また，目の和が 3 の倍数であり，しかも目の差が 2 以下である場合は，表が出たとき 8 通り，裏が出たとき 7 通りあり，その確率は，

$$\frac{1}{2}\times\frac{8}{36}+\frac{1}{2}\times\frac{7}{36}=\frac{5}{24}$$

したがって，和が 3 の倍数であるという条件のもとで，差が 2 以下である条件つき確率は，$\dfrac{5}{24}\div\dfrac{1}{3}=\dfrac{5}{8}$ である。

(2) さいころ A の目，さいころ B の目を表す確率変数を，それぞれ X_a，X_b とおく。すると，X_a と X_b は独立で，$X=X_a+X_b$ である。

硬貨を投げて表が出たとき, X の平均を $E_1(X)$，分散を $V_1(X)$ とおく。

$$E_1(X_a)=1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{6}+3\times\frac{1}{6}+4\times\frac{1}{6}+5\times\frac{1}{6}+6\times\frac{1}{6}=\frac{7}{2}$$

$$V_1(X_a)=\left(1^2\times\frac{1}{6}+2^2\times\frac{1}{6}+3^2\times\frac{1}{6}+4^2\times\frac{1}{6}+5^2\times\frac{1}{6}+6^2\times\frac{1}{6}\right)-\left(\frac{7}{2}\right)^2=\frac{35}{12}$$

同様に，$E_1(X_b)=\dfrac{7}{2}$，$V_1(X_b)=\dfrac{35}{12}$ なので,

$$E_1(X)=E_1(X_a+X_b)=E_1(X_a)+E_1(X_b)=7$$

$$V_1(X)=V_1(X_a+X_b)=V_1(X_a)+V_1(X_b)=\frac{35}{6}$$

硬貨を投げて裏が出たとき, X の平均を $E_2(X)$，分散を $V_2(X)$ とおく。

$$E_2(X_a)=1\times\frac{1}{6}+3\times\frac{1}{6}+4\times\frac{1}{6}+5\times\frac{1}{6}+6\times\frac{1}{6}+8\times\frac{1}{6}=\frac{9}{2}$$

$$V_2(X_a)=\left(1^2\times\frac{1}{6}+3^2\times\frac{1}{6}+4^2\times\frac{1}{6}+5^2\times\frac{1}{6}+6^2\times\frac{1}{6}+8^2\times\frac{1}{6}\right)-\left(\frac{9}{2}\right)^2=\frac{59}{12}$$

同様に，$E_2(X_b)=1\times\dfrac{1}{6}+2\times\dfrac{1}{3}+3\times\dfrac{1}{3}+4\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{5}{2}$

$$V_2(X_b)=\left(1^2\times\frac{1}{6}+2^2\times\frac{1}{3}+3^2\times\frac{1}{3}+4^2\times\frac{1}{6}\right)-\left(\frac{5}{2}\right)^2=\frac{11}{12}$$

よって，$E_2(X)=E_2(X_a+X_b)=E_2(X_a)+E_2(X_b)=7$

$$V_2(X)=V_2(X_a+X_b)=V_2(X_a)+V_2(X_b)=\frac{35}{6}$$

以上より，$E(X)=\dfrac{1}{2}\times E_1(X)+\dfrac{1}{2}\times E_2(X)=7$

また，$V_1(X)=E_1(X^2)-(E_1(X))^2$ より，$E_1(X^2)=V_1(X)+(E_1(X))^2$
同様に，$E_2(X^2)=V_2(X)+(E_2(X))^2$ となり，

$$E(X^2)=\frac{1}{2}\times E_1(X^2)+\frac{1}{2}\times E_2(X^2)$$
$$=\frac{1}{2}\left\{V_1(X)+(E_1(X))^2\right\}+\frac{1}{2}\left\{V_2(X)+(E_2(X))^2\right\}$$

よって，$V(X)=E(X^2)-(E(X))^2$ より，

$$\begin{aligned}V(X)&=\frac{1}{2}\left\{V_1(X)+(E_1(X))^2\right\}+\frac{1}{2}\left\{V_2(X)+(E_2(X))^2\right\}\\&\quad-\left\{\frac{1}{2}E_1(X)+\frac{1}{2}E_2(X)\right\}^2\\&=\frac{1}{2}V_1(X)+\frac{1}{2}V_2(X)+\frac{1}{4}\left\{E_1(X)-E_2(X)\right\}^2\\&=\frac{35}{6}\end{aligned}$$

[解 説]

$E(X)$ と $V(X)$ の値は，$E_1(X)=E_2(X)$，$V_1(X)=V_2(X)$ から「明らかに」としてもよいのですが，「明らかに」という言葉は「面倒くさい」と同義なことが多いので，しつこく計算してみました。時間内に終わることは期待できませんが……。

第６問

問題のページへ

(1) **A** の値を x^p にするには, 1 に x を p 回かければよいので, 120 行は,

120 FOR K=1 TO P

150 行は, **A** の値を n で割った余りを, **A** に代入する計算なので,

150 A=A-INT(A/N)*N

(2) $\log_{10} 2^{63} = 63\log_{10} 2 = 63\times 0.3010 = 18.963$ より，

$18 < \log_{10} 2^{63} < 19$，$10^{18} < 2^{63} < 10^{19}$

よって，2^{63} は 19 桁の数である。

さて，$x^p \geqq 2^{63}$ を満たす p は，$x=4$ のとき，$4^p \geqq 2^{63}$

$2^{2p} \geqq 2^{63}$，$2p \geqq 63$

p は自然数より，$p \geqq 32$

また，$x=8$ のとき，同様にして $8^p \geqq 2^{63}$，$2^{3p} \geqq 2^{63}$，$3p \geqq 63$

p は自然数より，$p \geqq 21$

(3) 110 行は, x を n で割った余りを **B** に代入する計算なので,

110 B=X-INT(X/N)*N

さて，$x=8$，$p=25$，$n=5$ のとき，110 行の **B** の値は 8 を 5 で割った余りとなるので，$B=3$ である。また, 130 行の **K** の値, 140 行の **A*B** の値, 150 行の **A** の値の変化を表にまとめると,

K	1	2	3	4	5	6	…
A*B	3	9	12	6	3	9	…
A	3	4	2	1	3	4	…

これより, **A*B** の値は 3, 9, 12, 6 を周期 4 でくり返すことがわかり, **A*B** の値の最大値は 12 である。

また, 130 行から 160 行までのループを $p=2^{62}$ 回処理するのにかかる時間を s 秒とすると，$s = 10^{-8}\times 2^{62}$ なので,

$\log_{10} s = -8 + 62\log_{10} 2 = 10.662$

よって，$10 \leqq \log_{10} s < 11$ より，$10^{10} \leqq s < 10^{11}$

[解 説]

常用対数を利用して概数を求めることと，コンピュータの処理能力を関連させた出題です。