## 第１問（必答問題）

解答解説のページへ

[1]　不等式$\log_2(x-1)+\log_{\frac{1}{2}}(3-x)\leqq 0$を満たす$x$の値の範囲は,

$\boxed{ア}<x\leqq\boxed{イ}$である。$x$がこの範囲にあるとき,

$$y=4^x-6\cdot 2^x+10$$

の最大値と最小値を求めよう。

$X=2^x$とおくと, $X$のとる値の範囲は$\boxed{ウ}<X\leqq\boxed{エ}$であり,

$$y=\left(X-\boxed{オ}\right)^{\boxed{カ}}+\boxed{キ}$$

である。したがって, $y$は$x=\boxed{ク}$のとき最大値$\boxed{ケ}$をとり,

$x=\log_2\boxed{コ}$のとき最小値$\boxed{サ}$をとる。

[2]　$\alpha$を$0^\circ<\alpha<180^\circ$を満たす角度とする。$0^\circ\leqq\theta\leqq 180^\circ$の範囲で関数

$$f(\theta)=\sin(\theta-\alpha)-\sin\theta$$

を考える。

(1)　方程式$f(\theta)=0$の解$\theta$は$\alpha$を用いて，$\theta=\boxed{シス}^\circ+\dfrac{\alpha}{2}$と表される。さらに，この解$\theta$が$\sin(\theta-\alpha)=\dfrac{1}{2}$を満たすならば，$\alpha=\boxed{セソタ}^\circ$である。

(2)　$\alpha$を(1)で求めた角度とするとき，関数$f(\theta)$は，$\theta=\boxed{チツテ}^\circ$のとき最大値

$\dfrac{\sqrt{\boxed{ト}}}{\boxed{ナ}}$，$\theta=\boxed{ニヌ}^\circ$のとき最小値$-\sqrt{\boxed{ネ}}$をとる。

## 第２問（必答問題）

解答解説のページへ

(1)　座標平面上の放物線 $y=x^2$ を $C$ とする。$a$ は $a\neq 1$ を満たす実数とし，$C$ 上に点 $\mathrm{P}(a+1,\ (a+1)^2)$ と点 $\mathrm{Q}(2a,\ 4a^2)$ をとる。2 点 P，Q を通る直線を $l$ とすると，$l$ の方程式は

$$y=\left(\boxed{\text{ア}}a+\boxed{\text{イ}}\right)x-\boxed{\text{ウ}}a^2-\boxed{\text{エ}}a$$

である。次に，$b$ は $b\neq 1$，$b\neq a$ を満たす実数として，2 点

$$\mathrm{R}(b+1,\ (b+1)^2),\ \mathrm{S}(2b,\ 4b^2)$$

を通る直線を $m$ とする。直線 $l$, $m$ の交点 T は，

$$\mathrm{T}\left(\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}(a+b+1),\ \boxed{\text{キ}}ab+\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}(a+b+1)\right)$$

である。よって，$b$ を限りなく $a$ に近づけるとき，点 T は限りなく点

$$\mathrm{U}\left(\frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}a+\frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{ケ}}},\ \boxed{\text{サ}}a^2+\frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}a+\frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{ケ}}}\right)$$

に近づく。

(2)　(1)で求めた点 U は，$a$ の値によらない放物線

$$D:y=\frac{\boxed{\text{シ}}x^2-\boxed{\text{ス}}x+\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}$$

上にある。さらに，点 U における放物線 $D$ の接線の傾きは $\boxed{\text{タ}}a+\boxed{\text{チ}}$ である。放物線 $D$ の接線で原点 O を通るものは，$y=x$ と $y=\boxed{\text{ツテ}}x$ の 2 つである。

(3)　2 つの放物線 $C$, $D$ の共有点の座標は $\left(\boxed{\text{ト}},\ \boxed{\text{ナ}}\right)$ である。放物線 $C$, $D$ および $y$ 軸で囲まれた部分の面積は $\dfrac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}}$ である。

## 第３問（選択問題）

解答解説のページへ

点A$(0,\ 0,\ 0)$を通り，ベクトル$\vec{u}=(1,\ 1,\ 0)$に平行な直線を $l$ とする。また，点B$(0,\ 5,\ -2)$を通り，ベクトル$\vec{v}=(1,\ 0,\ 1)$に平行な直線を $m$ とする。$l$ 上の点 P から $m$ に下ろした垂線の足をP$'$とする。また，$m$ 上の点 Q から $l$ に下ろした垂線の足をQ$'$とする。$\mathrm{PP'}=\mathrm{QQ'}$かつ$\overrightarrow{\mathrm{PP'}}\perp\overrightarrow{\mathrm{QQ'}}$となる P と Q を求めよう。

(1)　実数$t,\ t',\ s,\ s'$により，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=t\vec{u}$，$\overrightarrow{\mathrm{BP'}}=t'\vec{v}$，$\overrightarrow{\mathrm{BQ}}=s\vec{v}$，$\overrightarrow{\mathrm{AQ'}}=s'\vec{u}$と表される。

直線PP$'$と直線 $m$ が直交するから，$t'=\boxed{\text{ア}}+\dfrac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}t$である。ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{PP'}}$の成分を $t$ を用いて表すと，

$$\overrightarrow{\mathrm{PP'}}=\left(\boxed{\text{エ}}-\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}t,\quad \boxed{\text{キ}}-t,\quad \boxed{\text{クケ}}+\frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}t\right)$$

である。同様に直線QQ$'$と直線 $l$ が直交するから，$s'=\dfrac{5}{2}+\dfrac{1}{2}s$である。ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{QQ'}}$の成分を $s$ を用いて表すと，

$$\overrightarrow{\mathrm{QQ'}}=\left(\frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}-\frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}s,\quad \frac{\boxed{\text{タチ}}}{\boxed{\text{ツ}}}+\frac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}s,\quad \boxed{\text{ナ}}-s\right)$$

である。

(2)　さて，$\mathrm{PP'}^2+\mathrm{QP'}^2=\mathrm{PQ}^2=\mathrm{QQ'}^2+\mathrm{PQ'}^2$であるから，$\mathrm{PP'}=\mathrm{QQ'}$であるための条件は$\mathrm{QP'}=\mathrm{PQ'}$である。$\overrightarrow{\mathrm{PQ'}}=(s'-t)\vec{u}$，$\overrightarrow{\mathrm{QP'}}=(t'-s)\vec{v}$であるから，$\mathrm{PQ'}=\mathrm{QP'}$となるのは，$s=\boxed{\text{ニ}}-t$ ……①または$s=\boxed{\text{ヌネ}}+t$ ……②のときである。

(3)　①が成り立つとき，$\overrightarrow{\mathrm{PP'}}$と$\overrightarrow{\mathrm{QQ'}}$が垂直になるのは$t=\boxed{\text{ノ}}$または$t=\boxed{\text{ハ}}$のときである。（$\boxed{\text{ノ}}$と$\boxed{\text{ハ}}$は解答の順序は問わない）

②が成り立つときは，$\overrightarrow{\mathrm{PP'}}$と$\overrightarrow{\mathrm{QQ'}}$が垂直になるような実数 $t$ の値はない。

## 第４問（選択問題）

解答解説のページへ

複素数 $z = x + yi$（$x$, $y$ は実数）は $y \neq 0$ を満たし，かつ 1，$z$，$z^2$，$z^3$ は相異なるとする。また $z$ に共役な複素数を $\overline{z} = x - yi$ とする。

(1) 複素数平面において 1，$z$，$z^2$，$z^3$ の表す点をそれぞれ $A_0$，$A_1$，$A_2$，$A_3$ とする。線分 $A_0A_1$ と線分 $A_2A_3$ が両端以外で交わる条件を求めよう。線分 $A_0A_1$ と線分 $A_2A_3$ が両端以外の点 B で交わるとする。点 B を表す複素数を $w$ とする。点 B が線分 $A_0A_1$ を $a:(1-a)$ に内分していれば，$w = az + 1 - a$ と表される。ここで $0 < a < 1$ である。点 B が線分 $A_2A_3$ を $b:(1-b)$ に内分していれば，$w = bz^3 + (1-b)z^2$ と表される。ここで $0 < b < 1$ である。ゆえに

$$bz^3 + (1-b)z^2 = az + 1 - a$$

すなわち $\left(z - \boxed{\text{ア}}\right)\left(\boxed{\text{イ}}z^2 + z + 1 - \boxed{\text{ウ}}\right) = 0$ である。

$z$ は実数でないから

$$z + \overline{z} = -\frac{1}{\boxed{\text{エ}}}, \quad z\overline{z} = \frac{1 - \boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$$

である。これから $a$ と $b$ を，$x$ と $y$ を用いて表すと，

$$a = \boxed{\text{キ}} + \frac{x^{\boxed{\text{ク}}} + y^{\boxed{\text{ケ}}}}{\boxed{\text{コ}}\,x}, \quad b = -\frac{1}{\boxed{\text{サ}}\,x}$$

である。

したがって，$0 < a < 1$，$0 < b < 1$ より，線分 $A_0A_1$ と線分 $A_2A_3$ が両端以外で交わる条件は

$$x < \frac{\boxed{\text{シス}}}{\boxed{\text{セ}}} \quad \text{かつ} \quad \left(x + \boxed{\text{ソ}}\right)^2 + y^2 < \boxed{\text{タ}}$$

である。

(2) $z^4$ の表す点を $A_4$ とする。$z$ が(1)の条件を満たすとき，すなわち線分 $A_0A_1$ と線分 $A_2A_3$ が両端以外で交わるとき，線分 $A_3A_4$ と線分 $A_1A_2$ は両端以外で $\boxed{\text{チ}}$。

$\boxed{\text{チ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～②のうちから１つ選べ。

⓪　必ず交わる

①　交わることはない

②　交わることも，交わらないこともある

## 第５問（選択問題）

解答解説のページへ

2 つのさいころ A と B があり，各面に 1, 2, 3, 4, 5, 6 という目が書かれている。これらのさいころについて, A のさいころの各面には 1, 3, 4, 5, 6, 8 の目のシールを貼り, B のさいころの各面には 1, 2, 2, 3, 3, 4 の目のシールを貼った。

はじめに硬貨を投げ，次に A と B のさいころを同時に投げる次の試行を行う。

- 硬貨を投げて表が出れば，両方のさいころのシールをすべてはがして 2 つのさいころを同時に投げる。
- 硬貨を投げて裏が出れば，両方ともシールをはがさずに 2 つのさいころを同時に投げる。

この試行について次の問いに答えよ。ただし，シールの有無にかかわらず，さいころの各面の出方は同様に確からしいとする。

(1) 2 つのさいころの目の和が 3 の倍数になる場合は，硬貨を投げて表が出たとき $\boxed{\text{アイ}}$ 通りあり，裏が出たとき $\boxed{\text{ウエ}}$ 通りある。したがって，この試行において 2 つのさいころの目の和が 3 の倍数になる確率は $\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ である。また，目の和が 3 の倍数であるという条件のもとで，2 つのさいころの目の差が 2 以下である条件つき確率は $\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$ である。

(2) この試行における 2 つのさいころの目の和を表す確率変数を $X$ とする。

硬貨を投げて表が出たとき，同時に投げた 2 つのさいころの目の和の平均（期待値）は $\boxed{\text{ケ}}$ であり，その分散は $\dfrac{\boxed{\text{コサ}}}{\boxed{\text{シ}}}$ である。

硬貨を投げて裏が出たとき，2 つのさいころの目の和の平均は $\boxed{\text{ス}}$ であり，その分散は $\dfrac{\boxed{\text{セソ}}}{\boxed{\text{タ}}}$ である。

したがって，この試行における $X$ の平均 $E(X)$ は $\boxed{\text{チ}}$，分散 $V(X)$ は $\dfrac{\boxed{\text{ツテ}}}{\boxed{\text{ト}}}$ である。

## 第６問（選択問題）

解答解説のページへ

自然数 $x$, $p$ および $n$ を入力して $x^p$ を $n$ で割った余りを出力するプログラムを作成する。ただし，このプログラムを実行するコンピュータは $2^{63}$ 以上の数値を取り扱うことができないとする。

ここで，INT(X)は X をこえない最大の整数を表す関数である。また，必要ならば $\log_{10} 2 = 0.3010$ を用いてもよい。

〔プログラム 1〕

```
100  INPUT  "X,P,N"; X,P,N
110  A=1
120  FOR  K=1  TO [ア]
130    A=A*X
140  NEXT  K
150  A=[イ]
160  PRINT  A
170  END
```

(1)　〔プログラム 1〕の 120 行から 140 行の FOR ～ NEXT 文で $x^p$ を求めている。
$\boxed{ア}$ に当てはまるものを，次の⓪～⑥のうちから１つ選べ。

⓪ P　① 2*P　② P*P　③ P*X　④ A　⑤ N　⑥ X

また，150 行で $x^p$ を $n$ で割った余りを求めている。$\boxed{イ}$ に当てはまるものを，次の⓪～⑤のうちから１つ選べ。

⓪ INT(A/N)　① INT(A/N)*N　② A-INT(A/N)
③ A+INT(A/N)　④ A-INT(A/N)*N　⑤ A+INT(A/N)*N

(2)　$2^{63}$ は 10 進法で $\boxed{ウエ}$ 桁の数である。$x=4$ ならば $p \geqq \boxed{オカ}$ のとき，$x=8$ ならば $p \geqq \boxed{キク}$ のとき，おのおの $x^p \geqq 2^{63}$ であるので，〔プログラム 1〕による計算は，このコンピュータでは取り扱うことができない。ただし，$\boxed{オカ}$，$\boxed{キク}$ にはそれぞれ条件に適する最小の自然数を答えよ。

(3)　〔プログラム 1〕について(2)で述べた $x$ と $p$ の大きさに関する制限を改善するため，次の性質を利用してプログラムを変更する。

「$S$, $T$ を自然数とするとき，$S$, $T$ を $n$ で割った余りを $s$, $t$ とする。このとき，$s<n$ かつ $t<n$ であり，積 $ST$ を $n$ で割った余りと積 $st$ を $n$ で割った余りは等しい」

〔プログラム 2〕

```
100  INPUT  "X,P,N"; X,P,N
110  B= ケ
120  A=1
130  FOR  K=1  TO  ア
140    A=A*B
150    A= イ
160  NEXT  K
170  PRINT  A
180  END
```

〔プログラム 2〕の 110 行で $x$ を $n$ で割った余りを計算している。$\boxed{\text{ケ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～⑤のうちから 1 つ選べ。

⓪ INT(X/N)　① INT(X/N)*N　② X-INT(X/N)

③ X+INT(X/N)　④ X-INT(X/N)*N　⑤ X+INT(X/N)*N

〔プログラム 2〕を実行し，変数 $X, P, N$ にそれぞれ 8, 25, 5 を入力する。このとき，110 行の B の値は $\boxed{\text{コ}}$ である。さらに，130 行から 160 行の FOR ～ NEXT 文の各ステップにおける 140 行の A*B の値のなかでの最大値は $\boxed{\text{サシ}}$ である。

130 行から 160 行までのループを 1 回処理するのに $10^{-8}$ 秒必要であり，その他の行の処理時間は無視できるものとする。$p = 2^{62}$ のとき，〔プログラム 2〕を実行するのに必要な時間を $s$ 秒とすると，$10^{\boxed{\text{スセ}}} \leqq s < 10^{\boxed{\text{スセ}}+1}$ である。