第１問 [1]

問題のページへ

(1) C： $y=-x^2+(2a-5)x-2a^2+5a+3$ より，

$$y=-\left(x-\frac{2a-5}{2}\right)^2+\left(\frac{2a-5}{2}\right)^2-2a^2+5a+3$$

$$=-\left(x-\frac{2a-5}{2}\right)^2+\frac{-4a^2+37}{4}$$

よって, C の頂点の座標は，$\left(\frac{2a-5}{2},\ \frac{-4a^2+37}{4}\right)$である。

(2) グラフ C と x 軸が異なる 2 点で交わる条件は，$\frac{-4a^2+37}{4}>0$ より，

$$4a^2-37<0,\ -\frac{\sqrt{37}}{2}<a<\frac{\sqrt{37}}{2}$$

(3) グラフ C と x 軸との交点の x 座標は，$y=0$ を代入して，

$$-\left(x-\frac{2a-5}{2}\right)^2+\frac{-4a^2+37}{4}=0,\ x=\frac{2a-5}{2}\pm\frac{\sqrt{-4a^2+37}}{2}$$

x が整数であるためには，まず $-4a^2+37$ が平方数であることが必要で，

$$-4a^2+37=0,\ 1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ 36$$

a が整数から，$-4a^2+37=1$ すなわち $a=\pm3$ の場合だけになる。

$a=3$ のときは $x=\frac{6-5}{2}\pm\frac{1}{2}$ より $x=1,\ 0$，$a=-3$ のときは $x=\frac{-6-5}{2}\pm\frac{1}{2}$ より $x=-6,\ -5$ となり，ともに x は整数である。

[解 説]

(3)は整数問題ですが，値を絞り込んで答を見つけるのに，苦労は不要です。

第1問［2］

問題のページへ

(1)　$u=1$ すなわち $a=b$ となる $(a,\ b)$ の組は 6 通りあり，この確率は $\dfrac{6}{6^2}=\dfrac{1}{6}$ である。

(2)　$u>1$ すなわち $a>b$ となる $(a,\ b)$ の組は，1 から 6 までの整数から 2 つの整数を選び，大きい方を a，小さい方を b に対応させると考え，これから ${}_6\mathrm{C}_2\times 1=15$ 通りとなる。よって，この確率は $\dfrac{15}{6^2}=\dfrac{5}{12}$ である。

(3)　(1)より，$u=1$ となる確率は $\dfrac{6}{36}$ であり，同様にして確率を求めると，

(i)　$u=2\ (a=2b)$ のとき　$(a,\ b)=(2,\ 1),\ (4,\ 2),\ (6,\ 3)$ から，$\dfrac{3}{36}$ である。

(ii)　$u=3\ (a=3b)$ のとき　$(a,\ b)=(3,\ 1),\ (6,\ 2)$ から，$\dfrac{2}{36}$ である。

(iii)　$u=4\ (a=4b)$ のとき　$(a,\ b)=(4,\ 1)$ から，$\dfrac{1}{36}$ である。

(iv)　$u=5\ (a=5b)$ のとき　$(a,\ b)=(5,\ 1)$ から，$\dfrac{1}{36}$ である。

(v)　$u=6\ (a=6b)$ のとき　$(a,\ b)=(6,\ 1)$ から，$\dfrac{1}{36}$ である。

以上より, u が整数になる確率は,

$$\frac{6}{36}+\frac{3}{36}+\frac{2}{36}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36}=\frac{7}{18}$$

(4)　求める T の期待値は, (3)より,

$$1\times\frac{6}{36}+2\times\frac{3}{36}+1\times\frac{2}{36}+4\times\frac{1}{36}+1\times\frac{1}{36}+6\times\frac{1}{36}=\frac{25}{36}$$

[解 説]

数え上げて確率を求める基本問題です。(2)の考え方も有名です。

第2問 [1]

問題のページへ

(1)　A を B で割ると，$A = B(x+m+2)+(2m+n+5)x+(3m+n+3)$ ……(＊)より，

$$Q = x+m+2,\ R = (2m+n+5)x+(3m+n+3)$$

また，$x = 1+\sqrt{2}$ のとき,

$$B = (1+\sqrt{2})^2 - 2(1+\sqrt{2}) - 1 = 1+2\sqrt{2}+2-2-2\sqrt{2}-1 = 0$$

このとき, (＊)より,

$$A = (2m+n+5)(1+\sqrt{2})+(3m+n+3) = (5m+2n+8)+(2m+n+5)\sqrt{2}$$

ここで，$A = -1$ で，しかも m, n は整数なので,

$$5m+2n+8 = -1,\ 2m+n+5 = 0$$

よって，$m = 1$，$n = -7$

(2)　x が奇数のとき，$B = (x-1)^2 - 2$ より，B は偶数となり，BQ もつねに偶数であるので, A が偶数になるのは, R が偶数になる場合である。

そこで, R を m, n についてまとめると,

$$R = m(2x+3)+n(x+1)+(5x+3)$$

x が奇数のとき，$2x+3$ は奇数，$x+1$ は偶数，$5x+3$ は偶数となる。

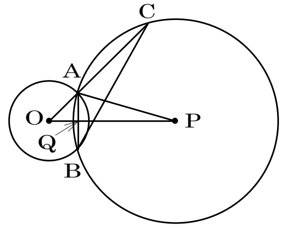
よって, m が偶数であることが, A の値がつねに偶数になるための必要十分条件である。

[解 説]

(1)は過去に何度も類題が出ています。(2)は(＊)を用いて R の偶奇を考えていますが, 直接 A を考察することで結論を導くことも可能です。

第２問 [2]

問題のページへ



円 O の半径を x とおき，△AOP に余弦定理を適用すると，

$$4 = x^2 + 6 - 2x\sqrt{6}\cos 45^\circ = x^2 + 6 - 2\sqrt{3}\,x$$

$x^2 - 2\sqrt{3}\,x + 2 = 0$ より，$x = \sqrt{3} \pm 1$

さて，$\mathrm{OA} = \sqrt{3} - 1$ のとき，$\angle\mathrm{AOP} = 45^\circ$ から△OAB は $\angle\mathrm{AOB} = 90^\circ$ の直角二等辺三角形となり，

$$\mathrm{AB} = \sqrt{2}\,\mathrm{OA} = \sqrt{6} - \sqrt{2}$$

また, AB と OP の交点を Q とするとき,

$$\angle\mathrm{BAC} = \angle\mathrm{AOB} + \angle\mathrm{AQO} = 45^\circ + 90^\circ = 135^\circ$$

そこで，△ABC に正弦定理を適用すると，

$$\frac{\mathrm{BC}}{\sin 135^\circ} = 2\cdot 2,\quad \mathrm{BC} = 4\sin 135^\circ = 2\sqrt{2}$$

[解 説]

三角比についての基本問題です。最後の設問は，いろいろな考え方ができます。たとえば，△BCP が直角二等辺三角形であるのを発見するのも，その１つです。

第３問

問題のページへ

(1) 公比を r とすると，$a_1+a_2=32$ より，$a_1+a_1r=32$ ………①

$a_4+a_5=864$ より，$a_1r^3+a_1r^4=864$，$(a_1+a_1r)r^3=864$ ………②

①②より，$r^3=\dfrac{864}{32}=27$ となり, r は実数より，$r=3$

①から $a_1=8$ なので，$a_n=8\cdot3^{n-1}$ である。

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k+4k-2)=8\cdot\frac{3^n-1}{3-1}+4\cdot\frac{1}{2}n(n+1)-2n=4\cdot3^n+2n^2-4$$

(2) $\dfrac{9}{37}=0.\dot{2}4\dot{3}$ より，$b_{n+p}=b_n$ となる最小の自然数 p は $p=3$ である。

また，$100=3\times33+1$ より，

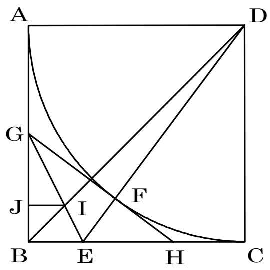
$$\sum_{k=1}^{100}b_k=\sum_{k=1}^{99}b_k+b_{100}=(2+4+3)\times33+2=299$$

[解 説]

(1)はありふれた問題ですが，(2)は，割り算を実行するまでは，難易の見当がつかないものでした。しかし，周期が 3 の数列が現れ，予想以上に簡単でした。

第4問

問題のページへ



(1) 点 E は BC を1 : 3に内分することより，

$$EC=\frac{3}{4}BC=\frac{3}{4}$$

△ECD に三平方の定理を用いると，

$$ED^2=CD^2+CE^2=1+\frac{9}{16}=\frac{25}{16},\quad ED=\frac{5}{4}$$

よって，$EF=ED-DF=\dfrac{1}{4}$

△GBE と△GFE において，

$\angle GBE=\angle GFE=90^\circ$, GE は共通，$BE=FE=\dfrac{1}{4}$ なので，

$$\triangle GBE\equiv\triangle GFE$$

よって，$\angle BGE=\angle FGE$となり，さらに$\angle GBI=\angle EBI=45^\circ$より，I は△BGH の2つの内角の二等分線の交点となるので，△BGH の内心である。

(2) まず，$GA=GF=GB$なので, G は AB の中点であり，$GB=\dfrac{1}{2}$である。

また，△IJB は直角二等辺三角形より，$JI=JB=r$となる。

ここで, JI // BE から，$GB:BE=GJ:JI$となり，

$$\frac{1}{2}:\frac{1}{4}=\left(\frac{1}{2}-r\right):r,\quad \frac{1}{2}r=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}-r\right),\quad r=\frac{1}{6}$$

[解 説]

例年，この第4問は，解いていくうちに苛立ってしまうのですが，今年の本試は，その程度が軽いものでした。

第５問

問題のページへ

(1)　$A=50$，$B=11$ のとき, X, Y の値の変化は次の表のようになる。

X	0	1	2	3	4
Y	50	39	28	17	6

まず, $A>0$ から 210 行は実行されない。

また，この表から 170 行は 4 回実行され，最右列の数値より,

X は 4, **Y** は 6 です。

と表示される。

(2)　$A=-50$，$B=6$ のとき, X, Y の値の変化は次の表のようになる。

X	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	-9
Y	-50	-44	-38	-32	-26	-20	-14	-8	-2	4

まず, $A<0$ から 170 行は実行されない。

また，この表から 210 行は 9 回実行され，最右列の数値より,

X は-9, **Y** は 4 です。

と表示される。

(3)　$A=14.9$，$B=2.5$ のとき, X, Y の値の変化は次の表のようになる。

X	0	1	2	3	4	5
Y	14.9	12.4	9.9	7.4	4.9	2.4

この表の最右列の数値より,

X は 5, **Y** は 2.4 です。

と表示されるので, Y の値を既約分数で表すと，$2.4=\dfrac{12}{5}$ となる。

[解 説]

プログラムを読み，値を計算していけば，空欄を埋めることのできる基本問題です。