第１問[1]（必答問題）

問題のページへ

(1)　$x \geqq 0$ を満たすすべての x に対して，1 次不等式 $Ax+B>0$ が成り立つ条件は，$f(x)=Ax+B$ のグラフを考えて, $A \geqq 0$ かつ $B>0$ である。

(2)　$(x+1)\sin^2\alpha+(2x-1)\sin\alpha\cos\alpha-x\cos^2\alpha>0$ ……①を変形して，

$$(\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha-\cos^2\alpha)x+(\sin^2\alpha-\sin\alpha\cos\alpha)>0$$

$$(\sin 2\alpha-\cos 2\alpha)x+(\sin^2\alpha-\sin\alpha\cos\alpha)>0 \quad \cdots\cdots②$$

$x \geqq 0$ を満たすすべての x に対して，不等式②が成立する条件は, (1)より，

$$\sin 2\alpha \geqq \cos 2\alpha \cdots\cdots③,\quad \sin^2\alpha>\sin\alpha\cos\alpha \cdots\cdots④$$

③より，$\sin 2\alpha-\cos 2\alpha \geqq 0$，$\sqrt{2}\sin(2\alpha-45^\circ) \geqq 0$ ………⑤

ここで，$0^\circ \leqq \alpha \leqq 180^\circ$ より $-45^\circ \leqq 2\alpha-45^\circ \leqq 315^\circ$ となるので，⑤の解は，

$$0^\circ \leqq 2\alpha-45^\circ \leqq 180^\circ,\quad \frac{45^\circ}{2} \leqq \alpha \leqq \frac{225^\circ}{2}$$

④より，$\sin\alpha(\sin\alpha-\cos\alpha)>0$，$\sqrt{2}\sin\alpha\cdot\sin(\alpha-45^\circ)>0$ ………⑥

ここで，$0^\circ \leqq \alpha \leqq 180^\circ$ より $\sin\alpha \geqq 0$ なので，⑥は $\sin\alpha>0$ かつ $\sin(\alpha-45^\circ)>0$ と一致する。そこで，$\sin\alpha>0$ より $0^\circ<\alpha<180^\circ$ となり，さらに $\sin(\alpha-45^\circ)>0$ で $-45^\circ \leqq \alpha-45^\circ \leqq 135^\circ$ より，$0^\circ<\alpha-45^\circ \leqq 135^\circ$，$45^\circ<\alpha \leqq 180^\circ$ である。

よって，⑥の解は，$45^\circ<\alpha<180^\circ$

以上まとめて，$45^\circ<\alpha \leqq \dfrac{225^\circ}{2}$

[解 説]

(1)の問題文中に 1 次不等式と書かれているのに，$A=0$ を含めなくては正解にならないのに，引っかかってしまいました。

第１問[2]（必答問題）

問題のページへ

(1)　$d=0$ より，$\log_9 x=\dfrac{3}{2}$，$x=9^{\frac{3}{2}}=3^3=27$

(2)　$a<0$ のとき，$\log_3 x<\dfrac{7}{2}$，$0<x<3^{\frac{7}{2}}=27\sqrt{3}$

$b<0$ のとき，$\log_3 x<\dfrac{5}{2}$，$0<x<3^{\frac{5}{2}}=9\sqrt{3}$

$c<0$ のとき，$\log_9 x<\dfrac{5}{2}$，$0<x<9^{\frac{5}{2}}=3^5=243$

$d<0$ のとき，$\log_9 x<\dfrac{3}{2}$，$0<x<27$

すると，$9\sqrt{3}<27<27\sqrt{3}<243$ なので，a，b，c，d のすべてが負の場合には，$0<x<9\sqrt{3}$ である。

また, a, b, c, d のうち 2 つが正で，残り 2 つが負の場合は, 4 つの不等式の共通範囲が存在することを考えると, $a<0$, $c<0$ かつ $b>0$, $d>0$ のときしかない。よって, $27<x<27\sqrt{3}$ となる。

さらに, a, b, c, d のすべてが正の場合には, $243<x$ である。

(3)　$27<x<27\sqrt{3}$ のとき，$\log_3 27<\log_3 x<\log_3 27\sqrt{3}$ より，$3<\log_3 x<\dfrac{7}{2}$

このとき，$\log_9 x=\dfrac{\log_3 x}{\log_3 9}=\dfrac{\log_3 x}{2}$ より，$\dfrac{3}{2}<\log_9 x<\dfrac{7}{4}$ となり，

$$-\frac{1}{2}<a<0,\quad \frac{1}{2}<b<1,\quad -1<c<-\frac{3}{4},\quad 0<d<\frac{1}{4}$$

よって, $c<a<d<b$ が成り立つ。

[解　説]

不等式の処理は繁雑ですが，空欄を埋めるだけなら，その形から，すぐに答はわかります。

第２問（必答問題）

問題のページへ

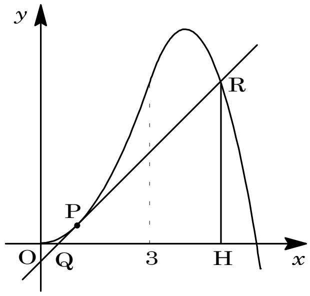
(1)　$0 \leqq x \leqq 3$ のとき，$g(x) = \int_0^x t\,dt = \frac{1}{2}\left[\, t^2 \,\right]_0^x = \frac{1}{2}x^2$

$x \geqq 3$ のとき，$g(x) = \int_0^3 t\,dt + \int_3^x (-3t+12)\,dt = \frac{1}{2}\left[\, t^2 \,\right]_0^3 + \left[-\frac{3}{2}t^2 + 12t \,\right]_3^x$

$$= \frac{9}{2} - \frac{3}{2}(x^2 - 9) + 12(x-3) = -\frac{3}{2}x^2 + 12x - 18$$

(2)　$0 \leqq x \leqq 3$ のとき $g'(x) = x$ より，$\mathrm{P}(a,\ g(a))$ $(0 < a < 3)$ における接線は傾きが $g'(a) = a$ となり，その方程式は,

$$y - \frac{1}{2}a^2 = a(x-a),\quad y = ax - \frac{1}{2}a^2 \cdots\cdots\cdots (*)$$



(3)　$(*)$と x 軸との交点は，$0 = ax - \frac{1}{2}a^2$ より $x = \frac{1}{2}a$ なので，$\mathrm{Q}\left(\frac{1}{2}a,\ 0\right)$となる。

また, $(*)$と $y = -\frac{3}{2}x^2 + 12x - 18$ $(x \geqq 3)$ の交点は,

$$ax - \frac{1}{2}a^2 = -\frac{3}{2}x^2 + 12x - 18,\quad 3x^2 + 2(a-12)x - (a+6)(a-6) = 0$$

$$(3x - a - 6)(x + a - 6) = 0,\quad x = \frac{a+6}{3},\quad x = 6 - a$$

ここで, $0 < a < 3$ より，$2 < \frac{a+6}{3} < 3$，$3 < 6 - a < 6$ なので，$x = 6 - a$

すると，$y = a(6-a) - \frac{1}{2}a^2 = 6a - \frac{3}{2}a^2$ より，$\mathrm{R}\left(6-a,\ 6a - \frac{3}{2}a^2\right)$である。

(4)　$\mathrm{QH} = 6 - a - \frac{1}{2}a = 6 - \frac{3}{2}a$，$\mathrm{RH} = 6a - \frac{3}{2}a^2$ なので,

$$S = \frac{1}{2}\left(6 - \frac{3}{2}a\right)\left(6a - \frac{3}{2}a^2\right) = \frac{9}{8}a^3 - 9a^2 + 18a$$

すると，$S' = \frac{27}{8}a^2 - 18a + 18 = \frac{9}{8}(a-4)(3a-4)$

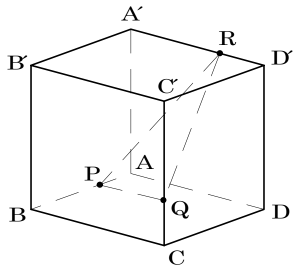
よって，$a = \frac{4}{3}$ のとき S は最大値をとる。

[解 説]

計算も難しくはなく，うまく流れるように誘導がつけられている問題です。

第３問（選択問題）

問題のページへ



(1) まず，$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AP}=(\vec{x}+\vec{y}+a\vec{z})-a\vec{x}$

$=(1-a)\vec{x}+\vec{y}+a\vec{z}$

$\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{AR}-\overrightarrow{AP}=\{\vec{z}+(1-a)\vec{y}\}-a\vec{x}$

$=-a\vec{x}+(1-a)\vec{y}+\vec{z}$

条件より，$|\vec{x}|=|\vec{y}|=|\vec{z}|=1$，$\vec{x}\cdot\vec{y}=\vec{y}\cdot\vec{z}=\vec{z}\cdot\vec{x}=0$

なので，$|\overrightarrow{PQ}|=|\overrightarrow{PR}|$となり，$|\overrightarrow{PQ}|:|\overrightarrow{PR}|=1:1$

$|\overrightarrow{PQ}|^2=(1-a)^2+1+a^2=2(a^2-a+1)$

$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}=-a(1-a)+(1-a)+a=a^2-a+1$

また，$\overrightarrow{PQ}$と$\overrightarrow{PR}$のなす角をθとすると，$\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}}{|\overrightarrow{PQ}||\overrightarrow{PR}|}=\dfrac{a^2-a+1}{2(a^2-a+1)}=\dfrac{1}{2}$な

ので，$\theta=60^\circ$である。

(2) $\triangle$PQR の重心が G なので，$\overrightarrow{AG}=\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{AR})$

$\overrightarrow{DG}=\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{3}\{a\vec{x}+\vec{x}+\vec{y}+a\vec{z}+(1-a)\vec{y}+\vec{z}\}-\vec{y}=\dfrac{a+1}{3}(\vec{x}-\vec{y}+\vec{z})$

ここで，$C'Q:D'R=1-a:a$であり，しかも$SQ=SR$から，三平方の定理を用いると，$C'S:SD'=a:1-a$となる。これより$\overrightarrow{C'S}=a\overrightarrow{C'D'}$である。

$\overrightarrow{SD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AS}=\vec{y}-\{\vec{y}+\vec{z}+(1-a)\vec{x}\}=(a-1)\vec{x}-\vec{z}$

(3) $\overrightarrow{SG}=\overrightarrow{SD}+\overrightarrow{DG}=\dfrac{1}{3}\{(4a-2)\vec{x}-(a+1)\vec{y}+(a-2)\vec{z}\}$で，$\overrightarrow{SG}\cdot\overrightarrow{DG}=0$より，

$\{(4a-2)\vec{x}-(a+1)\vec{y}+(a-2)\vec{z}\}\cdot(\vec{x}-\vec{y}+\vec{z})=0$

$(4a-2)+(a+1)+(a-2)=0$となるので，$a=\dfrac{1}{2}$である。

このとき，点 Q, S, R はそれぞれ辺CC'，$C'D'$，$D'A'$の中点であり，

$SQ=SR=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$QR=\sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+1^2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{3}{2}}$

したがって，余弦定理から$\cos\angle QSR=\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{3}{2}}{2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}=-\dfrac{1}{2}$となり，$\angle QSR=120^\circ$

である。

[解 説]

計算量の多い問題です。(3)も(1)と同様に，内積を用いて角度を求めることもできるのですが，さらに計算量が増えてしまいます。

第４問（選択問題）

問題のページへ

(1)　$z_0=2(\cos30^\circ+i\sin30^\circ)(\cos\theta+i\sin\theta)=2\{\cos(30^\circ+\theta)+i\sin(30^\circ+\theta)\}$より，

$|z_0|=2$，$\arg z_0=30^\circ+\theta$

(2)　$z_1=\dfrac{4\{(1-\sin\theta)+i\cos\theta\}^2}{(1-\sin\theta)^2+\cos^2\theta}=\dfrac{4\left\{(1-\sin\theta)^2+2i(1-\sin\theta)\cos\theta-\cos^2\theta\right\}}{1-2\sin\theta+\sin^2\theta+\cos^2\theta}$

$=\dfrac{4(1-\sin\theta)\{(1-\sin\theta)+2i\cos\theta-(1+\sin\theta)\}}{2(1-\sin\theta)}=4(-\sin\theta+i\cos\theta)$

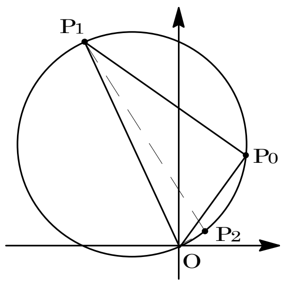
すると，$z_1=4\{\cos(90^\circ+\theta)+i\sin(90^\circ+\theta)\}$と表せるので，

$|z_1|=4$，$\arg z_1=90^\circ+\theta$

(3)　$\left|\dfrac{z_1}{z_0}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_0|}=\dfrac{4}{2}=2$，$\arg\dfrac{z_1}{z_0}=\arg z_1-\arg z_2=90^\circ+\theta-(30^\circ+\theta)=60^\circ$

これより，$\triangle OP_0P_1$は$\angle OP_0P_1=90^\circ$の直角三角形となり，

$P_0P_1=OP_1\sin60^\circ=2\sqrt{3}$



(4)　O，P_0，P_1，P_2の 4 点が同一円周上にある場合，OP_1がこの円の直径となり，$\angle OP_2P_1=90^\circ$である。

$\arg z_2=\arg\dfrac{-2}{z_1}=180^\circ-(90^\circ+\theta)=90^\circ-\theta$ より，

$\arg z_1>\arg z_2$

よって，$\arg\dfrac{z_1-z_2}{-z_2}=-90^\circ$ ………(＊)

すると，$\dfrac{z_1-z_2}{-z_2}=\dfrac{z_1+\dfrac{2}{z_1}}{\dfrac{2}{z_1}}=\dfrac{z_1{}^2+2}{2}=\dfrac{16(\sin^2\theta-2i\sin\theta\cos\theta-\cos^2\theta)+2}{2}$

$=8(\sin^2\theta-\cos^2\theta)+1-16i\sin\theta\cos\theta=-8\cos2\theta+1-8i\sin2\theta$

(＊)より，$\dfrac{z_1-z_2}{-z_2}$が純虚数なので，$8\cos2\theta-1=0$

$8(1-2\sin^2\theta)-1=0$，$\sin^2\theta=\dfrac{7}{16}$

$\sin\theta>0$より，$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$

[解 説]

(4)は 1997 年度の本試に似ています。それを思い浮かべながら解きました。

第５問（選択問題）

問題のページへ

(1)　Xの平均を$E(X)$，分散を$V(X)$とすると，

$$E(X)=(1+2+3+4+5+6+7+8)\times\frac{1}{8}=\frac{9}{2}$$

$$V(X)=(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+7^2+8^2)\times\frac{1}{8}-\left(\frac{9}{2}\right)^2=\frac{21}{4}$$

(2)　$Y=pX+q-100$ より，$E(Y)=pE(X)+q-100$

$$N=\frac{9}{2}p+q-100$$

(3)　$N=0$ のとき，$\frac{9}{2}p+q-100=0$，$9p+2q=100$，$9p=2(100-q)$

9 と 2 は互いに素なので, k を整数として，$p=2k$，$100-q=9k$ と表せる。

ここで，$p=2k>0$，$q=100-9k>0$ なので，$0<k<\frac{100}{9}=11+\frac{1}{9}$

よって, $1\leqq k\leqq 11$ より, p, q の値は 11 組あり, p の最小値は$k=1$ のときで $p=2$，最大値は$k=11$ のときで $p=22$ である。

(4)　$V(Y)=p^2V(X)=\frac{21}{4}p^2$ より，$V(Y)$が最小となるのは $p=2$ のときであり，最小値は$C=\frac{21}{4}\cdot 4=21$ である。

[解 説]

他の選択問題とあまりにも難易差があるので，驚いてしまいます。(3)の不定方程式もごく単純なものです。ところで，問題文中に突然出現している「D さん」というのは「大学入試センターさん」ということなのでしょうか。

第６問（選択問題）

問題のページへ

(1) D と E の値を入れかえるには, $D \to G$, $E \to D$, $G \to E$ というステップを踏めばよいので, そのプログラムは, **G=D:D=E:E=G** である。

同様にして, E と F の値を入れかえるプログラムは, **G=E:E=F:F=G** である

(2) 180 行で $D \geqq E$, 190 行で $E \geqq F$ となっているので, 点 S との距離の 2 乗の最小値を表すのは F である。

(3) $x=5$, $y=4$ のとき, $P=(5-2)^2+4^2=25$, $Q=(5-9)^2+(4-7)^2=25$ となり, 3 点 P, Q, R すべてが出力される条件は, $P=Q=R$ より,

$$R=(5-8)^2+(4-a)^2=25,\ a=0,\ 8$$

(4) 置きかえたプログラムは, 点 S との距離の 2 乗の最小値を M とし, $M \to F$ とするものなので, 160 行で $Q \geqq M$, 170 行で $R \geqq M$ となればよく,

```
160  IF  Q<M  THEN  M=Q
170  IF  R<M  THEN  M=R
```

(5) 点 S との距離の 2 乗の最大値を F で表すには, 180 行で $D \leqq E$, 190 行で $E \leqq F$ となるように変更すればよいので,

```
180  IF  D＞E  THEN  G=D:D=E:E=G
190  IF  E＞F  THEN  G=E:E=F:F=G
```

(6) 180 行は $D \geqq E$, 190 行は $E \geqq F$ となる値を D, E, F に代入することを意味するので, この 2 行を実行することによって最小値は F に代入される。しかし, 代入された D と E の大小関係は不明である。

そこで, もう一度, この 2 行を繰り返すことにより, 最大値は D に代入されることになる。

これより, 最小値と最大値の両方を出力するためには, 180 行と 190 行を少なくとも 2 回実行しなくてはならない。

[解 説]

プログラム自体は, 複雑なものではありません。ただ, 設問が 6 つもあって, 量的にやや多いという感じがします。