第１問[1]（必答問題）

問題のページへ

まず，$y=-2x^2+ax+b=-2\left(x-\dfrac{a}{4}\right)^2+\dfrac{a^2}{8}+b$ ……①より，C の頂点の座標は，$\left(\dfrac{a}{4},\ \dfrac{a^2}{8}+b\right)$となる。

また，①が点$(3,\ -8)$を通るので，$-8=-18+3a+b$，$b=-3a+10$ ………②

(1)　②より，頂点が$\left(\dfrac{a}{4},\ \dfrac{a^2}{8}-3a+10\right)$となるので, C が x 軸に接するのは,

$$\frac{a^2}{8}-3a+10=0,\ a^2-24a+80=0,\ (a-4)(a-20)=0$$

よって，$a=4$ または$a=20$ となる。

さて，$a=20$ のとき頂点$(5,\ 0)$，$a=4$ のとき頂点$(1,\ 0)$なので，$a=20$ のときの放物線は，$a=4$ のときの放物線を x 軸方向に 4 だけ平行移動したものである。

(2)　C の頂点の y 座標は，$y=\dfrac{a^2}{8}-3a+10=\dfrac{1}{8}(a-12)^2-8$ なので，$a=12$ のとき最小値-8 をとる。

[解 説]

2003 年は穏やかな問題からスタートです。計算も平易です。

第１問[2]（必答問題）

問題のページへ

(1)　異なる 8 個の頂点から 3 個選べば，三角形が 1 つ決まるので，三角形全部で ${}_8C_3 = 56$ 個できる。

また，頂点間を結ぶ線分の長さは，1，$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$ のいずれかであり，これより三角形の 3 辺の組合せは$(1,\ 1,\ \sqrt{2})$，$(1,\ \sqrt{2},\ \sqrt{3})$，$(\sqrt{2},\ \sqrt{2},\ \sqrt{2})$ となる。よって，互いに合同でない三角形は全部で 3 種類ある。

(2)　△ABC と合同な三角形は，3 辺の長さが$(1,\ 1,\ \sqrt{2})$のもので，各面で 4 個ずつ，合わせて $4\times 6 = 24$ 個あり，その確率は $\dfrac{24}{56} = \dfrac{3}{7}$ である。

また，正三角形は 3 辺の長さが$(\sqrt{2},\ \sqrt{2},\ \sqrt{2})$のもので，正方形 ABCD の対角線を含むものが 4 個，正方形 EFGH の対角線を含むものが 4 個，合わせて 8 個あり，その確率は $\dfrac{8}{56} = \dfrac{1}{7}$ である。

(3)　3 辺の長さが$(1,\ \sqrt{2},\ \sqrt{3})$の三角形である確率は，(2)より $1 - \dfrac{3}{7} - \dfrac{1}{7} = \dfrac{3}{7}$ である。

さて，3 種類の三角形の面積は，直角三角形である$(1,\ 1,\ \sqrt{2})$のとき $\dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot 1 = \dfrac{1}{2}$，$(1,\ \sqrt{2},\ \sqrt{3})$のとき $\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot 1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$，また正三角形の$(\sqrt{2},\ \sqrt{2},\ \sqrt{2})$のとき $\dfrac{1}{2}(\sqrt{2})^2\sin 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ である。

面積	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
確率	$\dfrac{3}{7}$	$\dfrac{3}{7}$	$\dfrac{1}{7}$

よって，三角形の面積の期待値は，$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{7} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{3}{7} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{1}{7} = \dfrac{3+3\sqrt{2}+\sqrt{3}}{14}$

[解 説]

三角形が 3 種類しかないということを，すばやく見極めるのがポイントです。従来より難しめの内容となっています。

第２問[1]（必答問題）

問題のページへ

(1)　A を B で割ったとき，

$$x^3+px^2+qx+r=(x^2-3x+2)(x+p+3)+(3p+q+7)x+(-2p+r-6)$$

(a)　商が $x-1$ のとき，$p+3=-1$，$p=-4$

(b)　余りが x で割り切れるとき，$-2p+r-6=0$，$r=2p+6$

(c)　商と余りが等しくなるとき，

$3p+q+7=1$ ……①，$-2p+r-6=p+3$ ……②

①より $3p+q=-6$，②より $-3p+r=9$ なので，$q+r=3$

(2)　$(|a+b|+|a-b|)^2=(a+b)^2+2|a+b||a-b|+(a-b)^2$

$$=2(a^2+b^2+|a^2-b^2|)$$

よって，$(|a+b|+|a-b|)^2=4a^2$ が成り立つための必要十分条件は，

$a^2+b^2+|a^2-b^2|=2a^2$

すなわち $|a^2-b^2|=a^2-b^2$，言いかえると $a^2 \geqq b^2$ である。

また，$a^2 \geqq b^2$ のときでない，すなわち $a^2<b^2$ のときには，

$(|a+b|+|a-b|)^2=2(a^2+b^2+|a^2-b^2|)=2(a^2+b^2-a^2+b^2)=4b^2$

すると，$a^2=b^2$ のときも含めて，$a^2 \leqq b^2$ のときには，

$(|a+b|+|a-b|)^2=4b^2$，$\frac{1}{2}(|a+b|+|a-b|)=|b|$

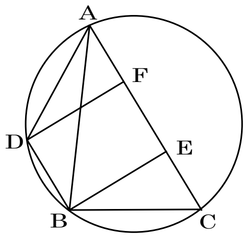
よって，$\frac{1}{2}(|a+b|+|a-b|)=b$ が成り立つための必要十分条件は，$a^2 \leqq b^2$ かつ $b \geqq 0$，まとめると $|a| \leqq b$ である。

[解 説]

(1)は，普通に割り算をすれば，すぐに結論が導けます。(2)は，後半の $a^2=b^2$ を含めるところで，ちょっと止まりました。結論を選ぶ問題はやりにくいものです。

第２問[2]（必答問題）

問題のページへ



△ABC に余弦定理を適用して,

$$\cos A=\frac{5^2+(4+\sqrt{3})^2-(2\sqrt{3})^2}{2\cdot5\cdot(4+\sqrt{3})}=\frac{8(4+\sqrt{3})}{10(4+\sqrt{3})}=\frac{4}{5}$$

すると，$\sin A=\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{3}{5}$ より,

$$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\cdot5\cdot(4+\sqrt{3})\cdot\frac{3}{5}=\frac{12+3\sqrt{3}}{2}$$

さて，AC // DB より $\angle\mathrm{DBC}+\angle\mathrm{ACB}=180^\circ$ となり，また台形 ADBC が円に内接するので，$\angle\mathrm{DBC}+\angle\mathrm{DAC}=180^\circ$ である。

これより $\angle\mathrm{ACB}=\angle\mathrm{DAC}$ なので，台形 ADBC は等脚台形となる。

そこで, B から AC に垂線 BE をひくと,

$$\mathrm{AE}=5\cos A=4,\quad \mathrm{EC}=(4+\sqrt{3})-4=\sqrt{3}$$

さらに, D から AC に垂線 DF をひくと，同様にして $\mathrm{AF}=\sqrt{3}$ となり,

$$\mathrm{DB}=\mathrm{FE}=(4+\sqrt{3})-\sqrt{3}-\sqrt{3}=4-\sqrt{3}$$

台形 ADBC の面積は，$\mathrm{BE}=5\sin A=3$ より，$\frac{(4+\sqrt{3})+(4-\sqrt{3})}{2}\times3=12$ である。

[解 説]

図がうまく書けるかどうかが，後半ができるかどうかの分岐点となっています。台形 ADBC が等脚台形である論理は，その後からついてきます。

第３問（選択問題）

問題のページへ

(1) 等比数列の初項は 18, 公比は$\dfrac{-6\sqrt{3}}{18}=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$なので, 第 6 項は,

$$18\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^5=-\frac{2}{\sqrt{3}}=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

また, 奇数番目の項については, 初項が 18, 公比が$\dfrac{1}{3}$の等比数列となり, 第 15 項は奇数番目の 8 項目となるので, 初項から第 15 項までの奇数番目の項の和は,

$$\frac{18\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^8\right\}}{1-\frac{1}{3}}=27\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^8\right\}=\frac{6560}{243}$$

(2) まず, 第 k 区画の末項までの項数は, $1+2+\cdots+k=\dfrac{1}{2}k(k+1)$である。

すると, 第 20 区画の末項までの個数は, $\dfrac{1}{2}\cdot 20\cdot 21=210$となり, 第 215 項は第 21 区画に含まれるので, $a_{215}=21$である。

また, 第 k 区画内の項の和は$k\times k=k^2$より, 第 1 区画から第 20 区画までの区画に含まれる項の総和は,

$$a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_{210}=\sum_{k=1}^{20}k^2=\frac{1}{6}\cdot 20\cdot 21\cdot 41=2870$$

これより, $a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n\geqq 3000$となるのは,

$$a_{211}+a_{212}+a_{213}+\cdots\cdots+a_n\geqq 3000-2870=130\ \cdots\cdots\cdots(*)$$

さらに, 第 21 区画の項数は 21 で, $21\times 6=126$, $21\times 7=147$なので, 第 21 区画の 7 項目が(*)を満たす最小のa_nである。

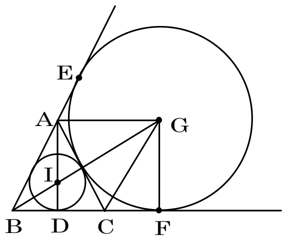
よって, 求める最小の自然数 n は, $210+7=217$である。

[解 説]

(1)は等比数列の基本題です。(2)は群数列で, 4 年ぶりの登場です。

第４問（選択問題）

問題のページへ



(1) G は傍心より, AG は$\angle$EAC の二等分線となり,

$2\angle \mathrm{EAG} = \angle \mathrm{EAC}$

$\triangle$ABC は二等辺三角形より,

$\angle \mathrm{EAC} = \angle \mathrm{ABC} + \angle \mathrm{BCA} = 2\angle \mathrm{ABC}$

よって, $\angle \mathrm{EAG} = \angle \mathrm{ABC}$

したがって, AG // BF………①

さらに, I は二等辺三角形 ABC の内心なので, 3 点 A, I, D は一直線上にある。すると, 直線 AD は底辺 BC を垂直に二等分し,

$\angle \mathrm{ADC} = 90^\circ$

また, F は接点より $\angle \mathrm{GFD} = 90^\circ$ となり, $\angle \mathrm{ADC} = \angle \mathrm{GFD} = 90^\circ$ ………②

①②より, 四角形 ADFG は長方形となり, AD = GF となる。

(2) $\angle \mathrm{ADB} = 90^\circ$ より, $\mathrm{AD} = \sqrt{\mathrm{AB}^2 - \mathrm{BD}^2} = \sqrt{25-4} = \sqrt{21}$

ここで, BI は$\angle$ABD の二等分線なので, AI : ID = BA : BD = 5 : 2 となり,

$\mathrm{AI} = \dfrac{5}{7}\mathrm{AD} = \dfrac{5\sqrt{21}}{7}$

①より $\angle \mathrm{AGI} = \angle \mathrm{CBI}$, また BI は$\angle$ABD の二等分線より $\angle \mathrm{CBI} = \angle \mathrm{ABI}$ なので,

$\angle \mathrm{AGI} = \angle \mathrm{ABI}$

よって, $\triangle$ABG は二等辺三角形となり, AG = AB = 5

さらに, 四角形 ADFG は長方形なので, $\angle \mathrm{GAI} = 90^\circ$ となり,

$\mathrm{IG} = \sqrt{\mathrm{AG}^2 + \mathrm{AI}^2} = \sqrt{25 + \dfrac{25\times 21}{49}} = \dfrac{\sqrt{25\times(49+21)}}{7} = \dfrac{5\sqrt{70}}{7}$

[解 説]

内心と傍心についての問題です。問題文中に散在しているヒントのために, 考え方が制限され, 後味はよくありません。もっとも毎年のことですが。

第５問（選択問題）

問題のページへ

$1 \leqq K \leqq N$ を満たす自然数 K に対して，140 行は K が 2 の倍数ならば次の $K+1$ のステップに進み，150 行は K が 3 の倍数ならば次の $K+1$ のステップに進むということを意味している。

つまり，与えられたプログラムは，N 以下の正の奇数で 3 の倍数でない数を表示するものである。

(1)　正の奇数で 3 の倍数でない数の和を S とするので, 170 行は **S=S+K** となる。

また, 180 行は，この数を小さい順に **a(1)=**, **a(2)=**，…と表示する命令なので,

180　PRINT　“a(”;T;“)=”;K

(2)　$N=10$ のとき, 10 以下の正の奇数で 3 の倍数でない数は 1, 5, 7 より,

a(1)=1, **a(2)=5**, **a(3)=7**

また，$S=1+5+7=13$ より, **S=13** が表示される。

このとき, 150 行が実行される回数は K が奇数の場合の 5 回, 160 行が実行される回数は K が奇数で 3 の倍数でない場合の 3 回である。

(3)　140 行を題意のように変更すると，K が奇数のときは 160 行に進み，偶数のときは次の 150 行で，K が 3 の倍数であれば次の $K+1$ のステップに進み，3 の倍数でなければ 160 行に進むということになる。

このとき 180 行によって表示されるのは，K が奇数または偶数で 3 の倍数でない数なので,

a(1)=1, **a(2)=2**, **a(3)=3**, **a(4)=4**, **a(5)=5**, **a(6)=7**, **a(7)=8**, **a(8)=9**, **a(9)=10**

また，$S=1+2+3+4+5+7+8+9+10=49$ より, **S=49** が表示される。

[解 説]

わかりやすいプログラムです。(2)と(3)の場合も $N=10$ と小さい数なので，数え上げるのも容易です。