第１問（必答問題）

問題のページへ

[1] (1) $f(\theta)=\sin(a\theta)+\sqrt{3}\cos(a\theta)=2\left(\dfrac{1}{2}\sin(a\theta)+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos(a\theta)\right)$より，

$f(\theta)=2\sin(a\theta+60°)$

(2) $a>0$，$\theta>0$ より，$a\theta+60°>60°$ なので，$f(\theta)=2\sin(a\theta+60°)=0$ を満たす解は, n を自然数として,

$$a\theta+60°=180°\times n\,,\ \theta=\frac{180°\times n-60°}{a}\cdots\cdots\cdots(*)$$

$(*)$を満たす最小のθ は，$n=1$を代入して，$\theta=\dfrac{120°}{a}$

また，小さい方から数えて 4 番目と 5 番目のものは, $(*)$に$n=4$，$n=5$をそれぞれ代入して，$\theta=\dfrac{660°}{a}$，$\theta=\dfrac{840°}{a}$である。

(3) $0°\leqq\theta\leqq180°$で，$f(\theta)=0$を満たすθ がちょうど 4 個存在するのは, (2)より,

$$\frac{660°}{a}\leqq180°,\ 180°<\frac{840°}{a}$$

よって，$\dfrac{660}{180}\leqq a$ かつ$a<\dfrac{840}{180}$ より，$\dfrac{11}{3}\leqq a<\dfrac{14}{3}$

[解 説]

最後の結論まで，誘導がうまくついていて，すっきり解くことができます。

第１問（必答問題）

問題のページへ

[2]　$f(x)=\log_2 x$，$g(x)=\log_2(x+a)$ より，関数 $y=g(x)$ のグラフは，関数 $y=f(x)$ のグラフを x 軸方向に $-a$ だけ平行移動したものである。

(1)　$F(x)=g(x)-f(x)=\log_2(x+a)-\log_2 x=\log_2\dfrac{x+a}{x}$ なので，

$F(2)=1$ のとき，$\log_2\dfrac{2+a}{2}=1$ より，$\dfrac{2+a}{2}=2$，$a=2$

$F(1)=2F(3)$ のとき，$\log_2(1+a)=2\log_2\dfrac{3+a}{3}$ より，

$1+a=\left(\dfrac{3+a}{3}\right)^2$，$a^2-3a=0$，$a=3\ (a>0)$

(2)　$h(x)=\log_4(4x+b)=\dfrac{\log_2(4x+b)}{\log_2 4}=\dfrac{\log_2(4x+b)}{2}$ なので，

$g(1)=h(1)$ のとき，$\log_2(1+a)=\dfrac{\log_2(4+b)}{2}$

$2\log_2(1+a)=\log_2(4+b)$，$(1+a)^2=4+b$ ………①

$g\left(\dfrac{1}{2}\right)=h\left(\dfrac{1}{2}\right)$ のとき，$\log_2\left(\dfrac{1}{2}+a\right)=\dfrac{\log_2(2+b)}{2}$

$2\log_2\left(\dfrac{1}{2}+a\right)=\log_2(2+b)$，$\left(\dfrac{1}{2}+a\right)^2=2+b$ ………②

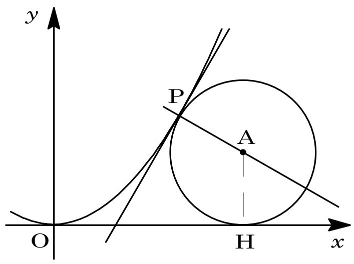
①②より，$a=\dfrac{5}{4}$，$b=\dfrac{17}{16}$

[解 説]

対数計算の基本を問う問題です。設問(1)と(2)には，あまり関係がありません。

第２問（必答問題）

問題のページへ



(1)　円C_1は，中心$\mathrm{A}(a,\ 1)$，半径が１より，

$$(x-a)^2+(y-1)^2=1\cdots\cdots\cdots①$$

(2)　$y=\dfrac{1}{2}x^2$ より $y'=x$ なので，$\mathrm{P}\left(b,\ \dfrac{1}{2}b^2\right)$における接線$l$の傾きは$b$となり，その方程式は，

$$y-\frac{1}{2}b^2=b(x-b)，\ y=bx-\frac{1}{2}b^2$$

また, Pを通り, lに直交する直線mの方程式は,

$$y-\frac{1}{2}b^2=-\frac{1}{b}(x-b)，\ y=-\frac{1}{b}x+\frac{1}{2}b^2+1\cdots\cdots\cdots②$$

(3)　直線m上に$\mathrm{A}(a,\ 1)$があるので，②より，

$$1=-\frac{1}{b}a+\frac{1}{2}b^2+1，\ a=\frac{1}{2}b^3\cdots\cdots\cdots③$$

さらに，$\mathrm{P}\left(b,\ \dfrac{1}{2}b^2\right)$が円$C_1$上にあるので，①より，

$$(b-a)^2+\left(\frac{1}{2}b^2-1\right)^2=1，\ -2ab+a^2+\frac{1}{4}b^4=0\cdots\cdots\cdots④$$

③を④に代入して，$-b^4+\dfrac{1}{4}b^6+\dfrac{1}{4}b^4=0$，$b^6-3b^4=0$

$b>0$ より $b=\sqrt{3}$，③から $a=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

このとき, lの傾きは$b=\sqrt{3}$となり, lとx軸のなす角をθとすると,

$$\tan\theta=\sqrt{3}，\ \theta=60°$$

また，$\mathrm{P}\left(\sqrt{3},\ \dfrac{3}{2}\right)$，$\mathrm{A}\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2},\ 1\right)$，$\angle\mathrm{PAH}=180°-60°=120°$ なので，C_1とC_2とx軸で囲まれた部分の面積Sは,

$$S=\int_0^{\sqrt{3}}\frac{1}{2}x^2dx+\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}+1\right)\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}-\sqrt{3}\right)-\pi\cdot1^2\cdot\frac{120}{360}$$

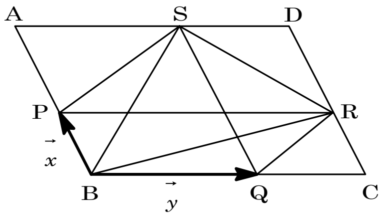
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{5\sqrt{3}}{8}-\frac{\pi}{3}=\frac{9\sqrt{3}}{8}-\frac{\pi}{3}$$

[解　説]

本年度の第２問は，例年になく，「図形と式」の比重が大きいものでした。

第３問（選択問題）

問題のページへ



(1)　$\overrightarrow{BA}=(a+1)\vec{x}$，$\overrightarrow{BC}=\frac{b+1}{b}\vec{y}=\left(1+\frac{1}{b}\right)\vec{y}$ より，

$$\overrightarrow{RQ}=\overrightarrow{BQ}-\overrightarrow{BR}=\vec{y}-\left\{\vec{x}+\left(1+\frac{1}{b}\right)\vec{y}\right\}$$

$$=-\vec{x}-\frac{1}{b}\vec{y}$$

$$\overrightarrow{SP}=\overrightarrow{BP}-\overrightarrow{BS}=\vec{x}-\left\{(a+1)\vec{x}+\vec{y}\right\}$$

$$=-a\vec{x}-\vec{y}$$

$$\overrightarrow{SB}=-\overrightarrow{BS}=-(a+1)\vec{x}-\vec{y},\quad \overrightarrow{RB}=-\overrightarrow{BR}=-\vec{x}-\left(1+\frac{1}{b}\right)\vec{y}$$

(2)　(1)より，$\overrightarrow{SP}\cdot\vec{x}=(-a\vec{x}-\vec{y})\cdot\vec{x}=-a|\vec{x}|^2-\vec{x}\cdot\vec{y}$

$$\vec{y}\cdot\overrightarrow{RQ}=\vec{y}\cdot\left(-\vec{x}-\frac{1}{b}\vec{y}\right)=-\vec{x}\cdot\vec{y}-\frac{1}{b}|\vec{y}|^2$$

$\overrightarrow{SP}\cdot\vec{x}=\vec{x}\cdot\vec{y}$ より，$-a|\vec{x}|^2-\vec{x}\cdot\vec{y}=\vec{x}\cdot\vec{y}$，$\vec{x}\cdot\vec{y}=-\frac{a}{2}|\vec{x}|^2$

$\vec{x}\cdot\vec{y}=\vec{y}\cdot\overrightarrow{RQ}$ より，$\vec{x}\cdot\vec{y}=-\vec{x}\cdot\vec{y}-\frac{1}{b}|\vec{y}|^2$，$\vec{x}\cdot\vec{y}=-\frac{1}{2b}|\vec{y}|^2$

(3)　RQ // SB のとき, k を実数として，$k\left(-\vec{x}-\frac{1}{b}\vec{y}\right)=-(a+1)\vec{x}-\vec{y}$

$$-k=-(a+1)\cdots\cdots①,\quad -\frac{k}{b}=-1\cdots\cdots②$$

①②より，$b=a+1$………③

SP // RB のとき, l を実数として，$l(-a\vec{x}-\vec{y})=-\vec{x}-\left(1+\frac{1}{b}\right)\vec{y}$

$$-la=-1\cdots\cdots④,\quad -l=-\left(1+\frac{1}{b}\right)\cdots\cdots⑤$$

④⑤より，$\frac{1}{a}=1+\frac{1}{b}$………⑥

③⑥より, $a>0$, $b>0$ なので，$a=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$，$b=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

(4)　(2)より $-\frac{a}{2}|\vec{x}|^2=-\frac{1}{2b}|\vec{y}|^2$ なので，$\frac{|\vec{y}|^2}{|\vec{x}|^2}=ab$ となる。

また, (3)より $ab=\frac{-1+5}{4}=1$ なので，まとめて $\frac{|\vec{y}|}{|\vec{x}|}=1$ となる。

よって，$\cos\angle\mathrm{PBQ}=\frac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{|\vec{x}||\vec{y}|}=\frac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{|\vec{x}|^2}=-\frac{a}{2}=\frac{1-\sqrt{5}}{4}$

[解　説]

(1)は初めに解いたように記述しましたが，よくみると誘導に逆らった形になっています。なお, 10 分程度の問題としては，かなりの計算量があります。

第４問（選択問題）

問題のページへ

(1)　$\arg\dfrac{z-a}{z-b}=\arg\dfrac{a-z}{b-z}=\pm 90^\circ$ より，$\angle azb=90^\circ$ となり，点 z は 2 点 a，b を直径の両端とする円周上にある。

その円の中心は $\dfrac{a+b}{2}$，半径は $\dfrac{|a-b|}{2}$ より，$\left|z-\dfrac{a+b}{2}\right|=\dfrac{|a-b|}{2}$

(2)　$x^2-2x+4=0$ の解は $x=1\pm\sqrt{3}i$ なので，$\alpha=1+\sqrt{3}i$，$\beta=1-\sqrt{3}i$ となる。

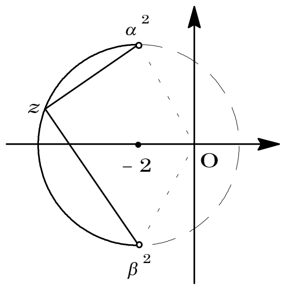
よって，$\arg\alpha=60^\circ$，$\arg\beta=300^\circ$

また，$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=2^2-2\cdot 4=-4$ ………①

$\alpha^2-\beta^2=(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=2\cdot 2\sqrt{3}i=4\sqrt{3}i$ ………②

①②より，$\alpha^2=-2+2\sqrt{3}i$，$\beta^2=-2-2\sqrt{3}i$

ここで，$\arg\dfrac{z-\alpha^2}{z-\beta^2}=\arg\dfrac{\alpha^2-z}{\beta^2-z}=90^\circ$ から，点 z は，右図のような 2 点 α^2，β^2 を直径の両端とする半円を描く。



その円の中心は，①から $\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{2}=-2$，半径は②から $\dfrac{|\alpha^2-\beta^2|}{2}=2\sqrt{3}$ となり，

$|z-(-2)|=2\sqrt{3}$，$|z+2|=2\sqrt{3}$

ただし，$120^\circ<\arg z<240^\circ$ である。

[解　説]

うまくまとまった問題です。誘導についても，ひとひねりが加えられています。

第５問（選択問題）

問題のページへ

(1)　$X=4$ であるのは 14 人なので，その確率は $\dfrac{14}{50}=\dfrac{7}{25}$ である。

$X=4$ かつ $Y=3$ であるのは 7 人なので，その確率は $\dfrac{7}{50}$ である。

また, $X \geqq 3$ であるのは 35 人なので，その確率は $\dfrac{35}{50}=\dfrac{7}{10}$ である。

$X \geqq 3$ かつ $Y=3$ であるのは 8 人なので，その確率は $\dfrac{8}{50}$ となり，$X \geqq 3$ という条件のもとで $Y=3$ となる条件つき確率は $\dfrac{\frac{8}{50}}{\frac{35}{50}}=\dfrac{8}{35}$ である。

(2)　$5+(7+a+b)+35=50$ より，$a+b=3$ ………①

$X=2$ であるのは 10 人なので，その確率は $\dfrac{10}{50}=\dfrac{1}{5}$ である。

X	1	2	3	4	5
P	$\frac{5}{50}$	$\frac{10}{50}$	$\frac{15}{50}$	$\frac{14}{50}$	$\frac{6}{50}$

よって, X の平均 $E(X)$ は,

$$E(X)=1\times\frac{5}{50}+2\times\frac{10}{50}+3\times\frac{15}{50}+4\times\frac{14}{50}+5\times\frac{6}{50}=\frac{78}{25}$$

(3)　Y の平均を $E(Y)$ とすると，条件より，$E(Y)=\dfrac{133}{50}$ である。

Y	1	2	3	4	5
P	$\frac{a+8}{50}$	$\frac{15}{50}$	$\frac{15}{50}$	$\frac{b+4}{50}$	$\frac{5}{50}$

また，右表から,

$$E(Y)=1\times\frac{a+8}{50}+2\times\frac{15}{50}+3\times\frac{15}{50}+4\times\frac{b+4}{50}+5\times\frac{5}{50}$$

よって，$(a+8)+30+45+4(b+4)+25=133$，$a+4b=9$ ………②

①②より，$a=1$，$b=2$

(4)　$X=2$ という事象と $Y=4$ という事象が独立であれば,

$$\frac{b}{50}=\frac{a+b+7}{50}\cdot\frac{b+4}{50}，(a+b+7)(b+4)=50b \text{ ………③}$$

①③より，$b=1$，$a=2$

このとき, (3)より，$E(Y)=\dfrac{a+4b+124}{50}=\dfrac{13}{5}$

[解 説]

確率についての基本問題です。表の数値を読んで，設問に答えていくだけです。

第６問（選択問題）

問題のページへ

(1)　まず 3 以上の自然数 p に対して，$1 \leqq a \leqq p-1$ を満たす自然数 a をとり，$a_1 = a$ とし，a_{i+1} を $a_i \times a$ を p で割った余りとする数列を定める。

次に，この余りが 1 になる最小の i を $f(a)$ と定め，余りが 1 となる i がないときには $f(a) = 0$ と決める。

これより，プログラムの方針は，$a_i = 1$ になればその i を出力して **FOR** ループを抜け出し, 1 から $p-1$ のどの i に対しても $a_i \neq 1$ ならば 0 を出力することになる。

すると，プログラムの 120 行は $a_1 = a$ に対応して **B=A** であり，140 行は余りが 1 となればこの i を出力することで **B=1** となる。

(2)　$p = 7$ に対して，$a = 1$ のとき $a_1 = 1$ なので，$f(1) = 1$

$a = 2$ のとき $a_1 = 2$，$a_2 = 4$，$a_3 = 1$ となり，$f(2) = 3$

$a = 3$ のとき $a_1 = 3$，$a_2 = 2$，$a_3 = 6$，$a_4 = 4$，$a_5 = 5$，$a_6 = 1$ となり，$f(3) = 6$

$a = 4$ のとき $a_1 = 4$，$a_2 = 2$，$a_3 = 1$ となり，$f(4) = 3$

(3)　140 行と 150 行を入れかえたプログラムにおいて，$p = 9$ とすると，

$a = 1$ のとき $a_1 = 1$ なので，$f(1) = 1$

$a = 2$ のとき $a_1 = 4$，$a_2 = 8$，$a_3 = 7$，$a_4 = 5$，$a_5 = 1$ となり，$f(2) = 5$

$a = 3$ のとき $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = a_6 = a_7 = a_8 = 0$ となり，$f(3) = 0$

$a = 4$ のとき $a_1 = 7$，$a_2 = 1$ となり，$f(4) = 2$

[解 説]

数ⅡB のコンピュータ問題はどんどん複雑になってきていましたが，本年度は先祖がえりをしたようです。