第１問（必答問題）

問題のページへ

[1]　(1)　C：$y=-4x^2+4(a-1)x-a^2$ ……(＊)が点$(1,\ -4)$を通るので,

$-4=-4+4(a-1)-a^2$，$a^2-4a+4=0$，$a=2$

(2)　(＊)より，$y=-4\left(x-\dfrac{a-1}{2}\right)^2-2a+1$

すると，頂点の座標は$\left(\dfrac{a-1}{2},\ -2a+1\right)$となる。

(3)　$a>1$ のとき，軸が$x=\dfrac{a-1}{2}>0$ より，$-1\leqq x\leqq 1$ において,

(i)　$0<\dfrac{a-1}{2}\leqq 1$（$1<a\leqq 3$）のとき

$x=\dfrac{a-1}{2}$で最大値$-2a+1$をとる。

(ii)　$\dfrac{a-1}{2}>1$（$a>3$）のとき

$x=1$で最大値$-a^2+4a-8$をとる。

また，$-1\leqq x\leqq 1$における最小値は，つねに$x=-1$でとり，その値は$-a^2-4a$である。

さて，最大値と最小値の差が 12 になるのは,

(i)　$1<a\leqq 3$ のとき

$-2a+1-(-a^2-4a)=12$ より，$a^2+2a-11=0$

$1<a\leqq 3$ より，$a=-1+2\sqrt{3}$

(ii)　$a>3$ のとき

$-a^2+4a-8-(-a^2-4a)=12$ より，$a=\dfrac{5}{2}$

ところが, $a>3$ より不適となる。

[解 説]

まず，2 次関数の最大・最小問題です。$a>1$ より，軸が$x=\dfrac{a-1}{2}>0$ となっていることに注目するのがポイントです。

第１問（必答問題）

問題のページへ

[2] (1) カードの数がすべて 0 であるのは, A から 0, B から 0 と 0 を取り出す場合なので, その確率は $\dfrac{1}{6}\times\dfrac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_2}=\dfrac{1}{21}$ である。

(2) カードの数の積が 4 であるのは, A から 1, B から 2 と 2 を取り出す場合, または A から 2, B から 1 と 2 を取り出す場合のいずれかなので, その確率は $\dfrac{2}{6}\times\dfrac{1}{{}_7\mathrm{C}_2}+\dfrac{3}{6}\times\dfrac{1\times 2}{{}_7\mathrm{C}_2}=\dfrac{4}{63}$ である。

(3) カードの数の積が 0 でないのは, A から 0 以外, B から 0 以外を取り出す場合なので, その確率は $\dfrac{5}{6}\times\dfrac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_2}=\dfrac{5}{42}$ である。

これより, カードの数の積が 0 である確率は, $1-\dfrac{5}{42}=\dfrac{37}{42}$ である。

(4) カードの数の積は 0, 2, 4, 8 のいずれかである。

(i) カードの数の積が 0 の確率 (3)より $\dfrac{37}{42}$

(ii) カードの数の積が 2 の確率 A から 1, B から 1 と 2 を取り出す場合なので,
$\dfrac{2}{6}\times\dfrac{1\times 2}{{}_7\mathrm{C}_2}=\dfrac{2}{63}$

(iii) カードの数の積が 4 の確率 (2)より $\dfrac{4}{63}$

(iv) カードの数の積が 8 の確率 A から 2, B から 2 と 2 を取り出す場合なので,
$\dfrac{3}{6}\times\dfrac{1}{{}_7\mathrm{C}_2}=\dfrac{1}{42}$

(i)～(iv)より, カードの数の積の期待値は,

$$0\times\frac{37}{42}+2\times\frac{2}{63}+4\times\frac{4}{63}+8\times\frac{1}{42}=\frac{32}{63}$$

[解 説]

確率の基本問題です。最後は期待値でしめくくるというのも, よくある構図です。

第２問（必答問題）

問題のページへ

[1] (1) $A^2=(x^2+ax+b)^2=x^4+2ax^3+(a^2+2b)x^2+2abx+b^2$

$B^2=(x^2+x+1)^2=x^4+2x^3+3x^2+2x+1$

条件より，$A^2+B^2=2x^4+6x^3+3x^2+cx+d$ なので，

$2a+2=6$ ……①，$a^2+2b+3=3$ ……②

$2ab+2=c$ ……③，$b^2+1=d$ ……④

①より $a=2$，②に代入して $b=-2$，③④に代入して $c=-6$，$d=5$

(2) $A^2-B^2=(A-B)(A+B)=\{(a-1)x+(b-1)\}\{2x^2+(a+1)x+b+1\}$

$P(x)=A-B$ とおくと，$A-B$ が $x-1$ で割り切れるのは，$P(1)=0$ より，

$a+b-2=0$ ………⑤

$Q(x)=A+B$ とおくと，$A+B$ が $x-1$ で割り切れるのは，$Q(1)=0$ より，

$a+b+4=0$ ………⑥

⑤と⑥は同時には成立しないので，$A-B$ と $A+B$ が同時に $x-1$ で割り切れることはない。

すると，A^2-B^2 が $(x-1)^2$ で割り切れるのは，$A+B$ が $(x-1)^2$ で割り切れる場合であり，$A+B$ を $(x-1)^2$ で割って

$A+B=(x-1)^2\cdot 2+(a+5)x+b-1$

よって，$a+5=0$ かつ $b-1=0$ より，$a=-5$，$b=1$

このとき $A-B=-6x$ となり，$A^2-B^2=-6x\cdot(x-1)^2\cdot 2=-12x(x-1)^2$

[解 説]

(2)では，親切すぎるほど，誘導がていねいにつけられています。なお，因数定理を利用した解を書いています。

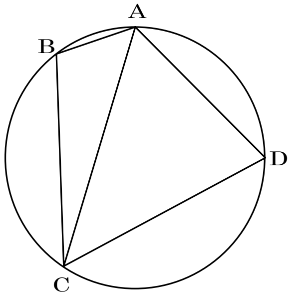
第２問（必答問題）

問題のページへ

[2] △ABC に余弦定理を適用して，

$$AC^2=(\sqrt{3}-1)^2+(\sqrt{3}+1)^2-2(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)\left(-\frac{1}{4}\right)=9$$

よって，$AC=3$



また，$\sin\angle ABC=\sqrt{1-\left(-\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{15}}{4}$ より，△ABC に正弦定理を適用して，

$$\frac{3}{\frac{\sqrt{15}}{4}}=2R,\quad R=\frac{12}{2\sqrt{15}}=\frac{2\sqrt{15}}{5}$$

$\sin\angle ADC=\sin(180^\circ-\angle ABC)=\sin\angle ABC=\frac{\sqrt{15}}{4}$ なので，△ACD$=3$△ABC であることを用いると，

$$\frac{1}{2}AD\times CD\cdot\frac{\sqrt{15}}{4}=3\cdot\frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)\cdot\frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$AD\times CD=3\cdot(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)=6\cdots\cdots\cdots①$$

さらに，$\cos\angle ADC=\cos(180^\circ-\angle ABC)=-\cos\angle ABC=\frac{1}{4}$ なので，△ACD に余弦定理を適用して，

$$3^2=AD^2+CD^2-2AD\times CD\cdot\frac{1}{4}\cdots\cdots\cdots②$$

①を②に代入して，$9=AD^2+CD^2-2\cdot6\cdot\frac{1}{4}$，$AD^2+CD^2=12\cdots\cdots\cdots③$

①③より，$(AD+CD)^2=AD^2+CD^2+2AD\times CD=24$ なので，

$$AD+CD=2\sqrt{6}$$

以上より，四角形 ABCD の周の長さは，$2\sqrt{6}+(\sqrt{3}-1)+(\sqrt{3}+1)=2\sqrt{6}+2\sqrt{3}$

[解 説]

AD^2+CD^2 の値を求めるところが，誘導にちょっと飛躍があります。ここを通過できれば完答です。

第３問（選択問題）

問題のページへ

(1) 公比を r とすると，$a_1+2a_2=0$ より，$a_1+2a_1r=0$，$a_1(1+2r)=0$

ここで，$a_1\neq 0$ より，$r=-\dfrac{1}{2}$

$a_1+a_2+a_3=\dfrac{9}{4}$ のとき，$a_1(1+r+r^2)=\dfrac{9}{4}$ より，$\dfrac{3}{4}a_1=\dfrac{9}{4}$，$a_1=3$

$$a_4+a_5+a_6=a_1r^3+a_1r^4+a_1r^5=a_1r^3(1+r+r^2)=\frac{9}{4}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^3=-\frac{9}{32}$$

また，数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$ は初項 $\dfrac{1}{3}$，公比 -2 の等比数列なので，

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1-(-2)^n}{1-(-2)}=\frac{1}{9}\left\{1-(-2)^n\right\}$$

条件より，$\dfrac{1}{9}\left\{1-(-2)^n\right\}=57$，$(-2)^n=-512$ より，$n=9$

(2) $b_n=pn+q$ より，数列 $\{b_n\}$ は初項 $b_1=p+q$，公差 p の等差数列なので，

$$S_n=\frac{p+q+pn+q}{2}\cdot n=\frac{1}{2}n(pn+p+2q)$$

$b_7=1$ より，$7p+q=1$ ………①

$S_{12}=10$ より，$\dfrac{1}{2}\cdot 12(12p+p+2q)=10$，$39p+6q=5$ ………②

①②より，$p=\dfrac{1}{3}$，$q=-\dfrac{4}{3}$

このとき，$S_n=\dfrac{1}{2}n\left(\dfrac{1}{3}n+\dfrac{1}{3}-\dfrac{8}{3}\right)=\dfrac{1}{6}n(n-7)$ なので，

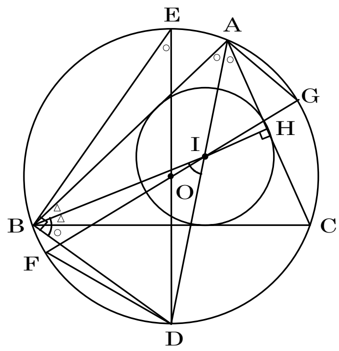
$$S_1+S_2+\cdots+S_{12}=\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{12}k(k-7)=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{6}\cdot 12\cdot 13\cdot 25-7\cdot\frac{1}{2}\cdot 12\cdot 13\right)=\frac{52}{3}$$

[解 説]

等差数列と等比数列を中心とした基本を確認する問題です。計算量も適当です。

第４問（選択問題）

問題のページへ



題意のように作図をすると，右図のようになる。

まず，△AHI と△EBD において，

I は△ABC の内心なので，$\angle\mathrm{HAI}=\angle\mathrm{BAI}$

また，$\angle\mathrm{BAI}=\angle\mathrm{BED}$ が成り立つので，

$$\angle\mathrm{HAI}=\angle\mathrm{BED}$$

条件より $\angle\mathrm{AHI}=90^\circ$ で，ED は外接円の直径なので $\angle\mathrm{EBD}=90^\circ$ となり，

$$\angle\mathrm{AHI}=\angle\mathrm{EBD}$$

よって，△AHI∽△EBD より，ED : AI = BD : HI が成り立つので，

$$\mathrm{AI}\cdot\mathrm{BD}=\mathrm{ED}\cdot\mathrm{HI}=2rR\cdots\cdots\cdots(1)$$

次に，△DBI において，$\angle\mathrm{DIB}=\angle\mathrm{IAB}+\angle\mathrm{IBA}$，$\angle\mathrm{DBI}=\angle\mathrm{DBC}+\angle\mathrm{IBC}$

ここで, I は△ABC の内心なので，$\angle\mathrm{IBA}=\angle\mathrm{IBC}$，$\angle\mathrm{IAB}=\angle\mathrm{DAC}$

また，$\angle\mathrm{DAC}=\angle\mathrm{DBC}$ であるから，$\angle\mathrm{IAB}=\angle\mathrm{DBC}$ となり，以上まとめると，$\angle\mathrm{DIB}=\angle\mathrm{DBI}$ が成り立つ。

よって，△DBI は二等辺三角形となり，

$$\mathrm{BD}=\mathrm{ID}\cdots\cdots\cdots(2)$$

さらに，△IFD と△IAG において，

$$\angle\mathrm{IFD}=\angle\mathrm{GFD}=\angle\mathrm{IAG},\ \angle\mathrm{FID}=\angle\mathrm{AIG}$$

よって，△IFD∽△IAG より，FI : AI = DI : GI が成り立つので，

$$\mathrm{AI}\cdot\mathrm{DI}=\mathrm{FI}\cdot\mathrm{GI}=(\mathrm{FO}+\mathrm{OI})(\mathrm{GO}-\mathrm{OI})=R^2-\mathrm{OI}^2\cdots\cdots\cdots(3)$$

(1), (2), (3)から，$2rR=R^2-\mathrm{OI}^2$，$\mathrm{OI}^2=R^2-2rR$ が成り立つ。

[解 説]

誘導つきの証明というのは，解答者をたいへん疲れさせます。そんな一題です。

第５問（選択問題）

問題のページへ

$Y=AX^2+BX+C$ として, U に Y の最小値, V に Y の最大値を格納するプログラムである。$X=0$ のとき $Y=C$ となるが, まず U, V にこの C の値を入れておく。

ここで, X の値を 0 から 9 まで順に変えて Y の値を計算し, $Y \geqq U$ のときには最小値はそのままにし, $Y<U$ のときは最小値を更新する。そのため 170 行は,

```
170　IF　Y>=U　THEN　GOTO　190
```

また, $Y \leqq V$ のときには最大値はそのままにし, $Y>V$ のときは最大値を更新する。さらに, 次の X の値でこれらの操作をくり返す。そのため 190 行は,

```
190　IF　Y<=V　THEN　GOTO　210
```

(1)　$A=-1$, $B=7$, $C=28$ を代入したとき, X と Y の値は右表のようになる。

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Y	28	34	38	40	40	38	34	28	20	10

すると, 180 行は $X=8$, 9 の 2 回実行され, 200 行は $X=1$, 2, 3 の 3 回実行される。そして最小値は 10, 最大値は 40 が表示される。

次に, 170 行と 190 行を以下のように変更する。

```
170　IF　Y>U　THEN　GOTO　190
190　IF　Y<V　THEN　GOTO　210
```

同じデータを入力すると, 180 行は $Y \leqq U$ となるとき, すなわち $X=0$, 7, 8, 9 の 4 回実行され, 200 行は $Y \geqq V$ となるとき, すなわち $X=0$, 1, 2, 3, 4 の 5 回実行される。そして最小値は 10, 最大値は 40 が表示される。

(2)　170 行と 180 行は $Y<U$ のとき U を更新するのと同じ意味なので, 次のように書き直してもよい。

```
170　IF　Y<U　THEN　U=Y
```

190 行と 200 行は $Y>V$ のとき V を更新するのと同じ意味なので, 次のように書き直してもよい。

```
190　IF　Y>V　THEN　V=Y
```

[解　説]

(1)で X と Y の対応表をつくれば, 後はその表を見ながら設問に答えていけます。もっとも, 計算ミスをするとたいへんですが。