第 1 問（必答問題）

問題のページへ

[1]　(1)　$\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}+\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}=\dfrac{1}{\sin\theta\cos\theta}=\dfrac{2}{\sin 2\theta}$ ………①

また，$\tan\theta-\dfrac{1}{\tan\theta}=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}-\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}=\dfrac{\sin^2\theta-\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}=\dfrac{-2\cos 2\theta}{\sin 2\theta}$ ………②

$\theta=15°$ として，①＋②より，

$$2\tan 15°=\frac{2}{\sin 30°}+\frac{-2\cos 30°}{\sin 30°}=4-2\sqrt{3}$$

よって，$\tan 15°=2-\sqrt{3}$

(2)　①より，$\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}=\dfrac{2}{\sin 2\theta}$ となる。

$15°\leqq\theta\leqq 60°$ より，$30°\leqq 2\theta\leqq 120°$ なので，$\dfrac{1}{2}\leqq\sin 2\theta\leqq 1$

よって，$\sin 2\theta=1\ (\theta=45°)$ のとき，$\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}$ は最小値 2 をとる。また，$\sin 2\theta=\dfrac{1}{2}\ (\theta=15°)$ のとき，$\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}$ は最大値 4 をとる。

[2]　$X=\dfrac{1}{(\sqrt{2})^x}=2^{-\frac{x}{2}}$ ……①とおくと，方程式 $\dfrac{4}{(\sqrt{2})^x}+\dfrac{5}{2^x}=1$ は，

$$4X+5X^2=1,\ 5X^2+4X-1=0 \ \cdots\cdots\cdots②$$

①から $X>0$ なので，②の解は $X=\dfrac{1}{5}$

これから，$2^{-\frac{x}{2}}=\dfrac{1}{5}$，$-\dfrac{x}{2}=\log_2\dfrac{1}{5}=-\log_2 5$，$x=2\log_2 5$

[解 説]

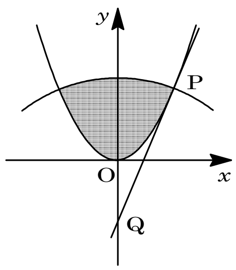
小問 2 題という構成は例年通りですが，内容はかなり易しくなっています。そのため，本問の 2 題の解が，B5 版 1 枚の中に余裕をもって入りました。

第 2 問（必答問題）

問題のページへ

[1]　$y=x^2$ より $y'=2x$ なので，点 $\mathrm{P}(a,\ a^2)$ における接線 l は，

$$y-a^2=2a(x-a),\quad y=2ax-a^2$$



l と y 軸との交点 Q の座標は，$\mathrm{Q}(0,\ -a^2)$ となる。

ここで，l と y 軸のなす角が $30°$ となるとき，

$$2a=\tan(90°-30°),\quad a=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

このとき，$\mathrm{P}\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{3}{4}\right)$，$\mathrm{Q}\left(0,\ -\frac{3}{4}\right)$ より，

$$\mathrm{PQ}^2=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\right)^2=3,\quad \mathrm{PQ}=\sqrt{3}$$

また，$l: y=\sqrt{3}x-\frac{3}{4}$ となるので，求める網点部の面積を S とすると，

$$\frac{S}{2}=\pi(\sqrt{3})^2\times\frac{30}{360}-\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left\{x^2-\left(\sqrt{3}x-\frac{3}{4}\right)\right\}dx=\frac{\pi}{4}-\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2dx$$

$$=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}\left[\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\pi}{4}-\frac{\sqrt{3}}{8}$$

よって，$S=\frac{\pi}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4}$

[2]　$y=3\sin\theta-2\sin^3\theta$ に対して，$\sin\theta=x$ とおくと，$y=3x-2x^3$

$0°\leqq\theta\leqq 210°$ より，$-\frac{1}{2}\leqq x\leqq 1$ となり，

$$y'=3-6x^2=-3(\sqrt{2}x+1)(\sqrt{2}x-1)$$

x	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	1
y'		＋	0	－	
y	$-\frac{5}{4}$	↗	$\sqrt{2}$	↘	1

右表より，$x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき最大値 $\sqrt{2}$ をとり，$x=-\frac{1}{2}$ のとき最小値 $-\frac{5}{4}$ をとる。

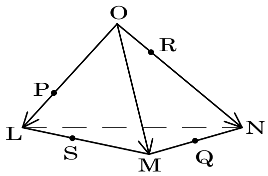
なお，最大値をとるのは $\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$，すなわち $\theta=45°$，$135°$ のときであり，最小値をとるのは $\sin\theta=-\frac{1}{2}$，すなわち $\theta=210°$ のときである。

[解 説]

第 2 問の微積分が，2 題構成となりました。しかし，内容は基本的で，計算量も少なく，平均点のアップに大きく寄与しています。

第 3 問（選択問題）

問題のページへ



(1)　$\overrightarrow{\mathrm{RS}}=\overrightarrow{\mathrm{OS}}-\overrightarrow{\mathrm{OR}}=(1-b)\vec{l}+b\vec{m}-a\vec{n}$

$$\overrightarrow{\mathrm{RP}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\frac{2}{3}\vec{l}-a\vec{n}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{RQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\frac{1}{2}\vec{m}+\left(\frac{1}{2}-a\right)\vec{n}$$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{RS}}=x\overrightarrow{\mathrm{RP}}+y\overrightarrow{\mathrm{RQ}}$ より，

$$(1-b)\vec{l}+b\vec{m}-a\vec{n}=x\left(\frac{2}{3}\vec{l}-a\vec{n}\right)+y\left\{\frac{1}{2}\vec{m}+\left(\frac{1}{2}-a\right)\vec{n}\right\}$$

$\vec{l}$，$\vec{m}$，$\vec{n}$ は 1 次独立より，

$$1-b=\frac{2}{3}x\cdots\cdots①,\ b=\frac{1}{2}y\cdots\cdots②,\ -a=-ax+\left(\frac{1}{2}-a\right)y\cdots\cdots③$$

①②より，$x=\dfrac{3}{2}(1-b)$，$y=2b$

③に代入して，$-a=-a\cdot\dfrac{3}{2}(1-b)+\left(\dfrac{1}{2}-a\right)\cdot 2b$，$ab+a-2b=0\cdots\cdots\cdots④$

さらに，$\overrightarrow{\mathrm{RP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{RQ}}$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{RP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{RQ}}=0$ より，

$$\left(\frac{2}{3}\vec{l}-a\vec{n}\right)\cdot\left\{\frac{1}{2}\vec{m}+\left(\frac{1}{2}-a\right)\vec{n}\right\}=0$$

ここで，$|\vec{l}|=|\vec{m}|=|\vec{n}|=1$，$\vec{l}\cdot\vec{m}=\vec{m}\cdot\vec{n}=\vec{n}\cdot\vec{l}=0$ より，$-a\left(\dfrac{1}{2}-a\right)=0$

$0<a<1$ から $a=\dfrac{1}{2}$ となり，④より $\dfrac{1}{2}b+\dfrac{1}{2}-2b=0$，$b=\dfrac{1}{3}$

このとき，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=-\dfrac{2}{3}\vec{l}+\dfrac{1}{2}\vec{m}+\dfrac{1}{2}\vec{n}$，$\overrightarrow{\mathrm{RS}}=\dfrac{2}{3}\vec{l}+\dfrac{1}{3}\vec{m}-\dfrac{1}{2}\vec{n}$ なので，

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{RS}}=-\frac{4}{9}+\frac{1}{6}-\frac{1}{4}=-\frac{19}{36}$$

[解 説]

空間ベクトルと図形に関する基本題です。与えられた 3 つのベクトルが，互いに直交する単位ベクトルなので，計算は簡単です。ただ，④式の第 1 項をマークするとき，ちょっとためらいました。

第 4 問（選択問題）

問題のページへ

(1)　$z^3=2+2i$ ……①に対して，$2+2i=2\sqrt{2}(\cos 45°+i\sin 45°)$

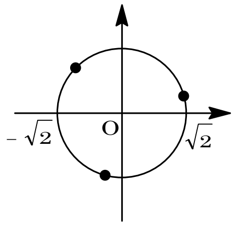
また，$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ とおくと，$z^3=r^3(\cos 3\theta+i\sin 3\theta)$ より，

$r^3=2\sqrt{2}$，$r=\sqrt{2}\ (r>0)$

さらに，$0°\leqq\theta<360°$ より，$0°\leqq 3\theta<360°\times 3$ なので，

$3\theta=45°$，$360°+45°$，$360°\times 2+45°$

$\theta=15°$，$135°$，$255°$



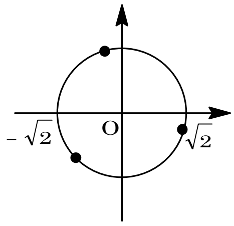
よって，第 2 象限にある①の解は，

$z=\sqrt{2}(\cos 135°+i\sin 135°)=-1+i$

(2)　$z^6-4z^3+8=0$ ……②を変形して，$(z^3-2)^2-4+8=0$，$(z^3-2)^2=-4$

$z^3-2=\pm 2i$，$z^3=2\pm 2i$

ここで，$z^3=2-2i$ の解は，$\overline{z}^3=\overline{2-2i}=2+2i$ より，①の解の共役複素数となるので，複素数平面上に図示すると，右図のようになる。



よって，第 2 象限にある②の解は，$z=-1+i$ 以外に，

$z=\sqrt{2}(\cos 105°+i\sin 105°)$

さて，$\cos 105°=\cos(60°+45°)=\cos 60°\cos 45°-\sin 60°\sin 45°=\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

$\sin 105°=\sin(60°+45°)=\sin 60°\cos 45°+\cos 60°\sin 45°=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

よって，$z=\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}+\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}i\right)=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}i$

また，②の他の解は，上の 2 つの図から，第 1 象限に 1 個，第 3 象限に 2 個，第 4 象限に 1 個存在する。

[解 説]

本年度の 6 問中，いちばんおもしろい問題です。(1)が(2)の誘導となっており，複素数平面上に方程式②の解がすぐに表示できます。

第 5 問（選択問題）

問題のページへ

(1)　$X=2$ のとき，さいころを 2 回振るので，Y の取り得る値は，$Y=0$，1，2 より 3 通りとなる。

(2)　$X=2$ となるのは，硬貨を 3 回投げて表が 2 回出る場合なので，その確率は ${}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$ となる。また，$X=2$ という条件のもとで，$Y=1$ となる条件つき確率は，${}_2\mathrm{C}_1\frac{2}{6}\cdot\frac{4}{6}=\frac{4}{9}$ である。

したがって，$X=2$，$Y=1$ となる確率は，$\frac{3}{8}\times\frac{4}{9}=\frac{1}{6}$ である。

同様にして，$X=1$，$Y=1$ となる確率は $\frac{1}{8}$，$X=3$，$Y=1$ となる確率は $\frac{1}{18}$ より，$Y=1$ となる確率は，$\frac{1}{8}+\frac{1}{6}+\frac{1}{18}=\frac{25}{72}$ となる。

(3)　Y の取り得る値は，$Y=0$，1，2，3 なので，(2)より $Y=1$ となる確率が $\frac{25}{72}$，また $Y=2$ となる確率は $\frac{5}{72}$，$Y=3$ となる確率は $\frac{1}{216}$ より，$Y=0$ となる確率は，

$$1-\left(\frac{25}{72}+\frac{5}{72}+\frac{1}{216}\right)=\frac{125}{216}$$

(4)　Y の平均は, (2), (3)より,

$$0\times\frac{125}{216}+1\times\frac{25}{72}+2\times\frac{5}{72}+3\times\frac{1}{216}=\frac{1}{2}$$

(5)　$X=2$，$Y=0$ となる確率は $\frac{3}{8}\times\left(\frac{4}{6}\right)^2=\frac{1}{6}$ なので，$Y=0$ という条件のもとで，$X=2$ となる条件つき確率は，$\dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{125}{216}}=\dfrac{36}{125}$ である。

[解 説]

普通は求めるべき確率の値が，問題文中にいろいろ記されています。それを用いて次のステップに進んでいくという，何か後味のよくない問題です。

第 6 問（選択問題）

問題のページへ

(1) $A=1$，$B=1$，$C=1$，$N=6$ のとき，ループの回転を J の値の変化で調べる。

すると，右表から，a(3)=2, a(4)=5, a(5)=13, a(6)=34 となる。

	初期	$J=3$	$J=4$	$J=5$	$J=6$
A	1	2	5	13	34
B	1	2	5	13	34
S	1	3	8	21	55

また, a(6)が表示される直前の S の値は 21 である。

(2) $a_1=a_2=1$，$c=1$ のとき，$s_1=a_1=1$ より，$a_3=a_2+\left[\dfrac{s_1}{c}\right]=1+1=2$

$$s_2=s_1+a_2=2,\quad a_4=a_3+\left[\frac{s_2}{c}\right]=2+2=4$$

$$s_3=s_2+a_3=4,\quad a_5=a_4+\left[\frac{s_3}{c}\right]=4+4=8$$

$$s_4=s_3+a_4=8,\quad a_6=a_5+\left[\frac{s_4}{c}\right]=8+8=16$$

(3)まず，具体的に $a_3=a_2+\left[\dfrac{s_1}{c}\right]$ が 140 行 **A=B＋INT(S/C)** に対応したときを考える。

すると，$A=a_3$，$B=a_2$，$S=s_1$ である。

次のステップ $s_2=s_1+a_2$ は **S=S+B** が対応し，これが 160 行になる。

さらに，$a_4=a_3+\left[\dfrac{s_2}{c}\right]$ を 140 行で実行するには，$B=a_3$ となる必要があるので, 170 行は **B=A** である。

(4) $A=1$，$B=1$，$C=2$，$N=6$ のとき，(1)と同様にして，値の変化を調べる。

すると，a(6)が表示される直前の B の値は 3 となる。

	初期	$J=3$	$J=4$	$J=5$	$J=6$
A	1	1	2	3	5
B	1	1	2	3	5
S	1	2	3	5	8

[解 説]

数学ＩA のコンピュータ問題と同じく，プログラムのバグ修正が題材となっています。しかし，本問を選択すれば，時間内の完答は至難のわざでしょう。