第１問（必答問題）

解答解説のページへ

[1] (1) $0° < \theta < 90°$ とする。

$$\tan\theta + \frac{1}{\tan\theta} = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\sin\boxed{\text{イ}}\theta}, \quad \tan\theta - \frac{1}{\tan\theta} = \frac{\boxed{\text{ウエ}}\cos\boxed{\text{オ}}\theta}{\sin\boxed{\text{カ}}\theta}$$

であり，これらを用いて $\tan 15°$ を求めると

$$\tan 15° = \boxed{\text{キ}} - \sqrt{\boxed{\text{ク}}}$$

である。

(2) θ が $15° \leqq \theta \leqq 60°$ の範囲を動くとき，$\tan\theta + \dfrac{1}{\tan\theta}$ は，$\theta = \boxed{\text{ケコ}}°$ のとき最小値 $\boxed{\text{サ}}$，$\theta = \boxed{\text{シス}}°$ のとき最大値 $\boxed{\text{セ}}$ をとる。

[2] 方程式 $\dfrac{4}{(\sqrt{2})^x} + \dfrac{5}{2^x} = 1$ の解 x を求めよう。

$X = \dfrac{1}{(\sqrt{2})^x}$ ……①とおくと，X の方程式 $\boxed{\text{ソ}}X^2 + \boxed{\text{タ}}X - 1 = 0$ が得られる。

一方，①より $X > \boxed{\text{チ}}$ である。したがって $X = \dfrac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}}$ を得る。これから，求める x は，$x = \boxed{\text{ト}}\log_2\boxed{\text{ナ}}$ となる。

第 2 問（必答問題）

解答解説のページへ

[1] 座標平面において放物線 $y=x^2$ を C とする。第 1 象限の点 $\mathrm{P}(a,\ a^2)$ における C の接線 l と y 軸との交点 Q の座標は，$\left(0,\ \boxed{ア}\,a^{\boxed{イ}}\right)$ である。l と y 軸のなす角が $30°$ となるのは，$a=\dfrac{\sqrt{\boxed{ウ}}}{\boxed{エ}}$ のときである。このとき線分 PQ の長さは $\sqrt{\boxed{オ}}$ であり，Q を中心とし線分 PQ を半径とする円と放物線 C とで囲まれてできる 2 つの図形のうち小さい方の面積は，$\dfrac{\pi}{\boxed{カ}}-\dfrac{\sqrt{\boxed{キ}}}{\boxed{ク}}$ である。

[2] 関数 $y=3\sin\theta-2\sin^3\theta\ (0°\leqq\theta\leqq210°)$ の最大値と最小値を求めたい。そのため $\sin\theta=x$ とおくと，y は $y=3x-2x^3$ と表される。x の動く範囲は，

$$\frac{\boxed{ケコ}}{\boxed{サ}}\leqq x\leqq\boxed{シ}$$

であるから，y は $x=\dfrac{1}{\sqrt{\boxed{ス}}}$ のとき最大値 $\sqrt{\boxed{セ}}$ をとり，$x=\dfrac{\boxed{ソタ}}{\boxed{チ}}$ のとき最小値 $\dfrac{\boxed{ツテ}}{\boxed{ト}}$ をとる。

θ の関数としては，y は $\theta=\boxed{ナニ}°$ および $\theta=\boxed{ヌネノ}°$ のとき最大，$\theta=\boxed{ハヒフ}°$ のとき最小である。

第 3 問（選択問題）

解答解説のページへ

四面体の 4 つの頂点を, O, L, M, N とする。線分 OL を 2 : 1 に内分する点を P とし, 線分 MN の中点を Q とする。a と b を 1 より小さい正の実数とする。線分 ON を $a:(1-a)$ に内分する点を R とし, 線分 LM を $b:(1-b)$ に内分する点を S とする。$\vec{l}=\overrightarrow{\mathrm{OL}}$, $\vec{m}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}$, $\vec{n}=\overrightarrow{\mathrm{ON}}$ とおく。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{RS}}=\left(\boxed{\text{ア}}-\boxed{\text{イ}}\right)\vec{l}+\boxed{\text{ウ}}\,\vec{m}-\boxed{\text{エ}}\,\vec{n}$

$$\overrightarrow{\mathrm{RP}}=\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}\vec{l}-\boxed{\text{キ}}\,\overline{n}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{RQ}}=\frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}\vec{m}+\left(\frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}-\boxed{\text{シ}}\right)\vec{n}$$

が成立する。

(2) 以下 $\vec{l}=(1,\ 0,\ 0)$, $\vec{m}=(0,\ 1,\ 0)$, $\vec{n}=(0,\ 0,\ 1)$ の場合を考える。

点 S が 3 点 P, Q, R の定める平面上にあるとする。このとき, $\overrightarrow{\mathrm{RS}}$ は実数 x と y を用いて, $\overrightarrow{\mathrm{RS}}=x\overrightarrow{\mathrm{RP}}+y\overrightarrow{\mathrm{RQ}}$ と表せる。これより

$$x=\frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}(1-b),\quad y=\boxed{\text{ソ}}\,b$$

となり, a と b は, $\boxed{\text{タチ}}+\boxed{\text{ツ}}-\boxed{\text{テト}}=0$ を満たすことがわかる。さらに $\overrightarrow{\mathrm{RP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{RQ}}$ が垂直になるのは $a=\dfrac{\boxed{\text{ナ}}}{\boxed{\text{ニ}}}$, $b=\dfrac{\boxed{\text{ヌ}}}{\boxed{\text{ネ}}}$ のときであり, このとき $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{RS}}$ の内積は, $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{RS}}=\dfrac{\boxed{\text{ノハヒ}}}{\boxed{\text{フヘ}}}$ となる。

第 4 問（選択問題）

解答解説のページへ

(1) 方程式 $z^3 = 2 + 2i$ ……①を解こう。

複素数 $2 + 2i$ を極形式で表すと

$$2 + 2i = \boxed{\text{ア}}\sqrt{\boxed{\text{イ}}}\left(\cos\boxed{\text{ウエ}}^\circ + i\sin\boxed{\text{ウエ}}^\circ\right)$$

となる。

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ とおき，①を満たす r，θ $(r>0,\ 0^\circ \leqq \theta < 360^\circ)$ を求めると，

$$r = \sqrt{\boxed{\text{オ}}},\quad \theta = \boxed{\text{カキ}}^\circ,\quad \boxed{\text{クケコ}}^\circ,\quad 255^\circ$$

となる。

したがって，複素数平面上の第 2 象限にある①の解は，$-\boxed{\text{サ}} + i$ である。

(2) 次に方程式 $z^6 - 4z^3 + 8 = 0$ ……②の解について考えよう。

②は $(z^3 - 2)^2 = -\boxed{\text{シ}}$，すなわち $z^3 = 2 \pm \boxed{\text{ス}}\,i$ となるから，(1)と同様に考えると，第 2 象限にある②の解は(1)で求めた $-\boxed{\text{サ}} + i$ と

$$\frac{\boxed{\text{セ}} - \sqrt{\boxed{\text{ソ}}}}{\boxed{\text{タ}}} + \frac{\boxed{\text{チ}} + \sqrt{\boxed{\text{ツ}}}}{\boxed{\text{テ}}}\,i$$

の 2 個であり，他の解は第 1 象限に 1 個，第 3 象限に $\boxed{\text{ト}}$ 個，第 4 象限に $\boxed{\text{ナ}}$ 個存在する。

注　この問題において複素数平面の象限とは，実軸を x 軸，虚軸を y 軸とした座標平面における象限のことをいう。

第5問（選択問題）

解答解説のページへ

1枚の硬貨を3回投げ，表が出た回数を X とする。次にさいころを X 回振る。（たとえば $X=2$ ならば，さいころを2回振ることになる。）そうして，1または2の目が出た回数を Y とする。ただし，$X=0$ の場合は，$Y=0$ ときめる。

(1)　$X=2$ のとき，Y の取り得る値は，$\boxed{ア}$ 通りである。

(2)　$X=2$ となる確率は $\dfrac{\boxed{イ}}{\boxed{ウ}}$ である。

$X=2$ という条件のもとで，$Y=1$ となる条件つき確率は $\dfrac{\boxed{エ}}{\boxed{オ}}$ である。

したがって，$X=2$，$Y=1$ となる確率は $\dfrac{\boxed{カ}}{\boxed{キ}}$ である。

同様にして，$X=1$，$Y=1$ となる確率は $\dfrac{1}{8}$ であり，$X=3$，$Y=1$ となる確率は $\dfrac{1}{18}$ である。

したがって，$Y=1$ となる確率は $\dfrac{\boxed{クケ}}{\boxed{コサ}}$ である。

(3)　(2)と同様に計算すると，$Y=2$ となる確率は $\dfrac{5}{72}$ であり，$Y=3$ となる確率は $\dfrac{1}{216}$ である。

したがって，$Y=0$ となる確率は $\dfrac{\boxed{シスセ}}{\boxed{ソタチ}}$ である。

(4)　Y の平均(期待値)は $\dfrac{\boxed{ツ}}{\boxed{テ}}$ である。

(5)　$Y=0$ という条件のもとで，$X=2$ となる条件つき確率は $\dfrac{\boxed{トナ}}{\boxed{ニヌネ}}$ である。

第 6 問（選択問題）

解答解説のページへ

正の整数 a_1，a_2，c が与えられたときに，$s_1 = a_1$ とし

$$s_i = s_{i-1} + a_i \qquad (i = 2,\ 3,\ \cdots) \qquad \cdots\cdots\cdots ①$$

$$a_{i+2} = a_{i+1} + \left(\frac{s_i}{c} \text{の整数部分} \right) \qquad (i = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \qquad \cdots\cdots\cdots ②$$

によって得られる数の列 a_3，a_4，…，a_n を表示させるために，次のようなプログラムを作ってみた。

以下のプログラムにおいて **INT(X)** は **X** を越えない最大の整数を与える関数である。

```
100  INPUT  "a1,a2,c=";A,B,C
110  INPUT  "n=";N
120  S=A
130  FOR  J=3  TO  N
140    A=B+INT(S/C)
150    PRINT  "a(";J;")=";A
160    B=A
170    S=S+A
180  NEXT  J
190  END
```

このプログラムが意図どおりに動作するかどうか確かめてみる。

(1)　このプログラムを実行し，**a1, a2, c=?**に対して **1, 1, 1** を入力し，**n=?**に対して **6** を入力すると

a(3)= $\boxed{\text{ア}}$

a(4)= $\boxed{\text{イ}}$

a(5)= $\boxed{\text{ウエ}}$

a(6)=34

が表示される。また **a(6)**が表示される直前の **S** の値は $\boxed{\text{オカ}}$ である。

(2)　次に，定義の式①，②に従って計算してみる。

$a_1 = 1$，$a_2 = 1$，$c = 1$ とすると

$a_3 = \boxed{\text{キ}}$，$a_4 = \boxed{\text{ク}}$，$a_5 = \boxed{\text{ケ}}$，$a_6 = \boxed{\text{コサ}}$，…

となる。

(3)　(1), (2)よりプログラムのどこかに誤りがあることがわかった。このプログラムの

160 行, 170 行を修正して，はじめに意図したように動かしたい。

```
130  FOR  J=3  TO  N
140    A=B+INT(S/C)
150    PRINT  "a(";J;")=";A
160    [ シ ]
170    [ ス ]
180  NEXT  J
```

の $\boxed{\text{シ}}$，$\boxed{\text{ス}}$ にあてはまるものを，次の⓪〜⑨のうちから 1 つずつ選べ。

⓪ A=B	① B=A	② A=A+1	③ B=B+1
④ S=S+A	⑤ S=S+B	⑥ S=A	⑦ S=A+B
⑧ S=S+1	⑨ S=B+1		

(4) (3)のように修正したプログラムを実行し，**a1**，**a2**，**c=?**に対して **1**，**1**，**2** を，**n=?**に対して **6** を入力するとき，**a(6)**が表示される直前の **B** の値は $\boxed{\text{セ}}$ である。