

第 1 問 (必答問題)

問題のページへ

[1] $y = 4x^2 - 8x + 5$, $y = -2(x+a)^2 + b$

(1) を $y = 4(x-1)^2 + 1$ と変形すると、頂点の座標は $(1, 1)$ となり、また の頂点は $(-a, b)$ なので、 と の頂点が一致する条件は、 $a = -1$ 、 $b = 1$ である。

(2) に $y = 17$ を代入すると、 $4x^2 - 8x + 5 = 17$ となり、 $x = -1, 3$

ここで、 も 2 点 $(-1, 17)$ 、 $(3, 17)$ を通るとき、 と のグラフの軸は一致するので、 の軸も $x = 1$ となる。

このとき、 は $y = -2(x-1)^2 + b$ となり、点 $(-1, 17)$ を通ることより、

$$-2(-1-1)^2 + b = 17, \quad b = 25$$

よって、 の頂点の座標は $(1, 25)$ である。

(3) を x 軸方向に c 、 y 軸方向に $-4c$ だけ平行移動したとき、

$$y + 4c = 4(x-c)^2 - 8(x-c) + 5$$

点 $(0, 4)$ を通るので $4 + 4c = 4c^2 + 8c + 5$ となり、 $c = -\frac{1}{2}$

このとき移動した放物線を表す 2 次関数の最小値は、 の最小値より $-4c = 2$ だけ大きい。

[解 説]

まず、第 1 問の[1]は基本題です。すばやく完答して、次へ進みたい問題です。

第 1 問 (必答問題)

問題のページへ

[2] 赤玉, 青玉, 黄玉を取り出す確率は, それぞれ $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$ である。

(1) 試行が 1 回で終わる確率は $\frac{1}{2}$, 試行が 2 回で終わる確率は $(1 - \frac{1}{2}) \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ なの

で, 試行が 1 回または 2 回で終わる確率は, $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ である。

(2) 試行が 3 回で終わる確率は, (1) より $1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$ なので, 受け取る金額の期待値は,

$$100 \times \frac{1}{2} + 200 \times \frac{1}{4} + 300 \times \frac{1}{4} = 175 \text{ 円}$$

(3) 青玉がちょうど 2 回取り出されるのは, 試行が 3 回で終わる場合だけである。

1 回目, 2 回目, 3 回目に取り出される色は, 順番に, (青, 青, 赤), (黄, 青, 青), (青, 黄, 青), (青, 青, 黄) となるので, その確率は,

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times 3 = \frac{1}{9}$$

(4) 黄玉が 1 回も取り出されないのは, 次の場合である。

(i) 試行が 1 回で終わるとき その確率は $\frac{1}{2}$

(ii) 試行が 2 回で終わるとき (青, 赤) より, その確率は $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

(iii) 試行が 3 回で終わるとき (青, 青, 青), (青, 青, 赤) より, その確率は,

$$\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \frac{1}{2} = \frac{5}{54}$$

(i)(ii)(iii) より, $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{5}{54} = \frac{41}{54}$

したがって, 黄玉が少なくとも 1 回取り出される確率は, $1 - \frac{41}{54} = \frac{13}{54}$ である。

[解 説]

難問ではないものの, 制限時間 10 分程度で 4 つの小問というのは, ややきついのではないかと思います。

第 2 問 (必答問題)

問題のページへ

[1] $A - B = 5x^2 - 5x - 10 = 5(x+1)(x-2) \dots\dots (*)$ である。

(1) A を $P = x + 1$ で割ると,

$$A = P(x^2 + 4x + a^2 - 4) - 6a + 24$$

A が P で割り切れるとき, $-6a + 24 = 0$ から $a = 4$

このとき, $A = (x^2 + 4x + 12)P$

すると, $(*)$ から,

$$B = A - 5P(x - 2) = (x^2 + 4x + 12)P - (5x - 10)P = (x^2 - x + 22)P$$

(2) A を $Q = x - 2$ で割ると,

$$A = Q(x^2 + 7x + a^2 + 14) + (3a^2 - 6a + 48)$$

すると, $R = 3a^2 - 6a + 48 = 3(a - 1)^2 + 45 > 0$

[解 説]

今年の数学 A の問題では, いちばん基本的です。剰余の定理を用いると, さらにスピードアップも図れます。

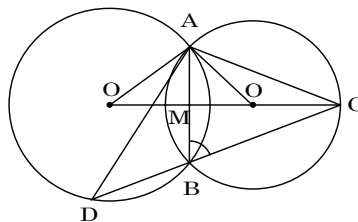
第 2 問 (必答問題)

問題のページへ

[2] $\angle ABC = \theta$ とおくと, $\sin \theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ より,

$$\cos \theta = \sqrt{1 - \frac{20}{25}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\cos \angle ABD = \cos(180^\circ - \theta) = -\cos \theta = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$



ABD に余弦定理を適用して,

$$AD^2 = 9 + 5 - 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{5} \left(-\frac{\sqrt{5}}{5} \right) = 20, \quad AD = 2\sqrt{5}$$

さて, 円 O の半径を R とし, また $\sin \angle ABD = \sin(180^\circ - \theta) = \sin \theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ を用いて,

ABD に正弦定理を適用すると,

$$2\sqrt{5} = 2R \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5}, \quad R = \frac{5}{2}$$

さらに, ABC は二等辺三角形なので, $\angle BAC = \angle ABC = \theta$ となる。

また, $BM = \frac{1}{2}AB = \frac{3}{2}$ より, $BC = \frac{MB}{\cos \theta} = \frac{3}{2}\sqrt{5}$

また, 円 O' の半径を R' とおき, ABC に正弦定理を適用すると,

$$\frac{3}{2}\sqrt{5} = 2R' \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5}, \quad R' = \frac{15}{8}$$

このとき, $OM = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} = 2$, $O'M = \sqrt{\left(\frac{15}{8}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{9}{8}$ より,

$$OO' = OM + O'M = 2 + \frac{9}{8} = \frac{25}{8}$$

[解 説]

三角比の分野は, 過去 3 年間, 円に内接する四角形が題材でしたが, 今年は様変わりし, 内容もやや難化しました。特に, 円 O' の半径を求める設問は, 方針に迷いが生じます。最初に解いたときは, $\angle AO'C = 2\theta$ となることを用いて, 2 倍角公式で処理しました。

第 3 問 (選択問題)

問題のページへ

(1) $a_1 = 2, a_2 = 3, a_{n+2} = a_n + 4$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) より,

$$a_3 = a_1 + 4 = 6, a_4 = a_2 + 4 = 7, a_5 = a_3 + 4 = 10, a_6 = a_4 + 4 = 11$$

また, $a_{40} = 3 + (20 - 1) \cdot 4 = 79, a_{39} = 2 + (20 - 1) \cdot 4 = 78$

$$\sum_{k=1}^{40} a_k = \frac{2+78}{2} \times 20 + \frac{3+79}{2} \times 20 = 1620$$

(2) 条件より, $b_3 = 7, b_4 = 11$ で, $b_{n+1} - c = 2(b_n - c)$ から,

$$11 - c = 2(7 - c), c = 3$$

すると, $b_3 - 3 = (b_1 - 3) \cdot 2^2$ より, $7 - 3 = 4(b_1 - 3), b_1 = 4$ このとき, $b_n - 3 = (4 - 3) \cdot 2^{n-1} = 2^{n-1}$ となり, $b_n = 2^{n-1} + 3$

$$\sum_{k=1}^{10} b_k = \frac{2^{10} - 1}{2 - 1} + 3 \cdot 10 = 1053$$

[解 説]

漸化式がついに登場です。等差数列とはいえ 1 つ飛びですので、ひねりが加えられています。

第 4 問 (選択問題)

問題のページへ

点 D は $\triangle ABC$ の内心なので, CD は $\angle ACB$ の二等分線となり,

$$\angle ACD = \frac{1}{2} \angle ACB$$

$$\text{また, } \angle ABE = \angle ACE = \frac{1}{2} \times 90^\circ = 45^\circ$$

$$\text{次に, } \angle EDB = \angle DCB + \angle DBC = 45^\circ + \frac{1}{2} \angle ABC$$

$$= \angle ABE + \angle DBA = \angle EBD$$

すると, $\triangle EBD$ は二等辺三角形となり, $ED = EB$ である。

$$\text{さて, } \angle EOB = 90^\circ \text{ から, } BE = \frac{1}{\cos 45^\circ} = \sqrt{2} \text{ となり, } ED = \sqrt{2} \text{ となる。}$$

よって, 点 D の軌跡は, E を中心とした半径 $\sqrt{2}$ の円弧である。

また, E から $\triangle ABC$ の内接円に引いた接線の接点を T とすると, $\angle ETD = 90^\circ$ となるので,

$$l^2 = ED^2 - r^2 = 2 - r^2$$

すると, l が最小となるのは, r が最大となるときで, $\triangle ABC$ は直角二等辺三角形となる。すなわち $\angle ABC = 45^\circ$ である。

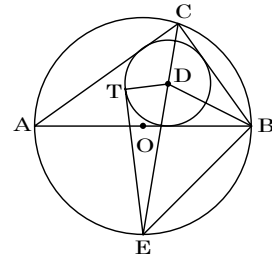
このとき, $AC = BC = \sqrt{2}$, $AB = 2$ なので,

$$(\sqrt{2} - r) + (\sqrt{2} - r) = 2, \quad r = \sqrt{2} - 1$$

$$\text{よって, } l^2 = 2 - (\sqrt{2} - 1)^2 = 2\sqrt{2} - 1$$

[解 説]

方針が誘導されている幾何の問題は, 解いていると気疲れをしてしまいます。本問もそんな感じです。



第 5 問 (選択問題)

問題のページへ

- (1) $X = 2$, $N = 5$ のとき, 流れ図のループの回転する回数で X , N , Y の値の変化を調べると, 右表のようになる。3 回目の回転で $N = 0$ となるので, $Y = 32$ が表示される。

	初期	1 回	2 回	3 回
X	2	4	16	...
N	5	2	1	0
Y	1	2	...	32

また, $X = 1$, $N = 13$ のとき, 同様して X , N , Y

の値の変化を調べると, 右表のようになる。

4 回目の回転で $N = 0$ となるので, 処理

Y に $Y \times X$ を代入 は 3 回実行され, 処理

X に X^2 を代入 も 3 回実行される。

	初期	1 回	2 回	3 回	4 回
X	1	1	1	1	...
N	13	6	3	1	0
Y	1	1	...	1	1

- (2) $X = 2$, $N = 5$ のとき, プログラムの 140 行と 180 行の間のループの回転する回数で X , N , Y の値の変化を調べると, 右表のようになる。3 回目の回転で $N = 0$ となるので, $Y = 16$ が表示される。

	初期	1 回	2 回	3 回
X	4
N	5	2	1	0
Y	1	4	...	16

- (3) (2) のプログラムを (1) の流れ図の処理を実行するプログラムに書き換えるには, 130 行の $X=X \times X$ を削除し, N が 0 かどうかを判断した後, $N \neq 0$ のとき X に X^2 を代入するを追加すればよいので, 175 行に $X=X \times X$ を追加する。

[解説]

プログラムの修正という新しい傾向の問題です。流れ図とプログラムを両方とも読んでいくと, 時間がどうしても不足してしまいます。