第１問（必答問題）

問題のページへ

[1]　(1)　$f(x)=3^x+3^{-x}$のとき，$f(x-1)=3^{x-1}+3^{-x+1}=\dfrac{1}{3}\cdot 3^x+3\cdot 3^{-x}$

また，$f(x-1)=f(x)$のとき，$\dfrac{1}{3}\cdot 3^x+3\cdot 3^{-x}=3^x+3^{-x}$

$\dfrac{1}{3}\cdot 3^{2x}+3=3^{2x}+1$，$3^{2x}=3$，$x=\dfrac{1}{2}$

このとき，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=3^{\frac{1}{2}}+3^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{3}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

(2)　$y=\log_2\left(\dfrac{x}{2}+3\right)=\log_2\dfrac{1}{2}(x+6)=-1+\log_2(x+6)$ ……①より，①のグラフは，

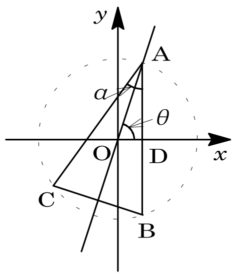
$y=\log_2 x$ ……②のグラフをx軸方向に-6, y軸方向に-1だけ平行移動したもの。

また，①②より，$\log_2\left(\dfrac{x}{2}+3\right)=\log_2 x$，$\dfrac{x}{2}+3=x$，$x=6$

このとき，$y=\log_2 6=1+\log_2 3$から，①②の共有点の座標は，$(6,\ 1+\log_2 3)$

[2]　(1)　$l: y=3x$より，$\tan\theta=3$

また，$\dfrac{1}{\cos^2\theta}=1+3^2=10$で，$\cos\theta>0$より，$\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{10}}$



さらに, BC の垂直二等分線が l より，△OAD について,

$\dfrac{\alpha}{2}=90°-\theta$，$\alpha=180°-2\theta$

$\cos\alpha=\cos(180°-2\theta)=-\cos 2\theta=-(2\cos^2\theta-1)=\dfrac{4}{5}$

(2)　OA = OB = OC より，点 O は△ABC の外心となるので,

$\angle\mathrm{BOC}=2\angle\mathrm{CAB}=2\alpha$

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\sin 2\theta}{\frac{1}{2}\cdot\mathrm{OB}\cdot\mathrm{OC}\sin 2\alpha}=\frac{\sin 2\theta}{\sin 2\alpha}=\frac{\sin(180°-\alpha)}{\sin 2\alpha}$$

$$=\frac{\sin\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{1}{2\cos\alpha}=\frac{5}{8}$$

[解　説]

[1]は，類題を一度は経験したと思われるほどの穏やかな内容です。[2]は，三角関数の計算だけでなく，図形と関連させたところが，昨年とは異なる点です。

第 2 問（必答問題）

問題のページへ

(1) $\int_{-1}^{0} g(x)dx = -6$ より，$\int_{-1}^{0} (3bx^2 + ux + v)dx = -6$

$$\left[bx^3 + \frac{u}{2}x^2 + vx \right]_{-1}^{0} = -6，\ -b + \frac{u}{2} - v = 6 \cdots\cdots\cdots ①$$

また $g(-1) = -9$ より，$3b - u + v = -9 \cdots\cdots\cdots ②$

①②より，$2b - \frac{u}{2} = -3$，$u = 4b + 6$

$$v = -3b + u - 9 = -3b + (4b + 6) - 9 = b - 3$$

よって，$g(x) = 3bx^2 + (4b + 6)x + b - 3 \cdots\cdots\cdots ③$

また，$f(x) = 3ax^2 - (8a + 6)x + 4a + 6 \cdots\cdots\cdots ④$

さて条件より，$y = f(x)$ と $y = g(x)$ が，y 軸上で共有点をもち，その点における 2 つの放物線の接線が一致することより，

$f(0) = g(0)$ から，$b - 3 = 4a + 6$ より，$4a - b = -9 \cdots\cdots\cdots ⑤$

$f'(0) = g'(0)$ から，$4b + 6 = -8a - 6$ より，$2a + b = -3 \cdots\cdots\cdots ⑥$

⑤⑥より，$a = -2$，$b = 1$

このとき，$f(0) = -2$，$f'(0) = 10$ なので，接線の方程式は，$y = 10x - 2$

(2) $h(x) = \int_{0}^{x} f(t)dt$ より，$h(0) = \int_{0}^{0} f(t)dt = 0$

$$h(2) = \int_{0}^{2} \left\{ 3at^2 - (8a + 6)t + 4a + 6 \right\} dt = \left[at^3 - (4a + 3)t^2 + (4a + 6t)t \right]_{0}^{2}$$

$$= 8a - 4(4a + 3) + 2(4a + 6) = 0$$

また，$h'(x) = f(x)$ より，$h'(0) = f(0) = 4a + 6$

$$h'(2) = f(2) = 12a - 2(8a + 6) + 4a + 6 = -6$$

これより，$0 \leqq x \leqq 2$ で $h(x)$ が正の値も負の値もとる条件は，$h(0) = h(2) = 0$ より，$0 < x < 2$ で $h(x) = 0$ が解をもつことである。

ここで，$h'(2) < 0$ より，求める条件は，

$$h'(0) = 4a + 6 < 0，\ a < -\frac{3}{2}$$

[解 説]

センターの数II B の平均点に最も影響を与えるのが，微積分の計算の質と量です。今年は易で少という感じがしました。実際，連立方程式を解くだけという設問がかなりありました。なお，最後の設問は，直観的な解を書きましたが，センターではこれでよいと思います。

第3問（選択問題）

問題のページへ

(1)　$\angle \mathrm{BOC} = \angle \mathrm{COD} = 90^\circ$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OC}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OD}} = 0$

また $\mathrm{OB} = \mathrm{OD} = 2\sin 60^\circ = \sqrt{3}$，$\angle \mathrm{BOD} = 120^\circ$ より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OD}} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}\cos 120^\circ = -\frac{3}{2}$$

(2)　$\mathrm{BP} : \mathrm{PD} = a : (1-a)$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (1-a)\overrightarrow{\mathrm{OB}} + a\overrightarrow{\mathrm{OD}}$

$$\overrightarrow{\mathrm{PA}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}} = -\overrightarrow{\mathrm{OC}} - (1-a)\overrightarrow{\mathrm{OB}} - a\overrightarrow{\mathrm{OD}} = (a-1)\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}} - a\overrightarrow{\mathrm{OD}}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{PC}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}} = (a-1)\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}} - a\overrightarrow{\mathrm{OD}}$$

(1) より $|\overrightarrow{\mathrm{OB}}| = |\overrightarrow{\mathrm{OD}}| = \sqrt{3}$，$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}| = 1$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OC}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OD}} = 0$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OD}} = -\dfrac{3}{2}$

なので,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PC}} &= (a-1)^2 \cdot 3 - a(a-1)\left(-\frac{3}{2}\right) - 1 - a(a-1)\left(-\frac{3}{2}\right) + a^2 \cdot 3 \\ &= 9a^2 - 9a + 2\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{PA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{PC}}$ が直交するとき，$\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PC}} = 0$ なので,

$$9a^2 - 9a + 2 = 0,\quad a = \frac{1}{3},\ \frac{2}{3}$$

[解 説]

一見たじろいでしまう問題ですが, 内容は平易そのものでした。ハッタリだけという感じです。

第4問（選択問題）

問題のページへ

$x^3-kx^2+kcx+c^2=0$ ……①に対して，①の左辺を $f(x)$ とおき，$f(x)$ を $x+1$ で割ると，

$$f(x)=(x+1)\left\{x^2-(k+1)x+kc+k+1\right\}+c^2-kc-k-1$$

ここで，①が $x=-1$ を解にもつので，$f(-1)=0$ より，

$$c^2-kc-k-1=0,\ k(c+1)=c^2-1$$

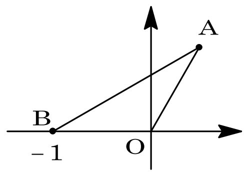
$c>0$ より，$k=c-1$ ………②

②を代入すると，$f(x)=(x+1)(x^2-cx+c^2)$

よって，$f(x)=0$ の解は，$x=-1,\ \dfrac{c\pm\sqrt{3}ci}{2}$ となるので，

$$\alpha=\frac{c+\sqrt{3}ci}{2}=c\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

このとき，△OAB が二等辺三角形となるのは，OA = OB の場合より，



$$c=|\alpha|=1$$

すると，$\alpha+1=\dfrac{3}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i=\sqrt{3}(\cos 30^\circ+i\sin 30^\circ)$

$$(\alpha+1)^6=(\sqrt{3})^6(\cos 180^\circ+i\sin 180^\circ)=-27$$

[解 説]

昨年に引き続き，前半が複素数と方程式の領域から，後半が複素数平面からの出題となっていました。なお，二等辺三角形の条件で場合分けが必要かと思いましたが，図から不要とわかりました。

第5問（選択問題）

問題のページへ

(1)　右表より，$X=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 8$ なので，X は 7 通りの値をとり，その最大値は 8，最小値は 1 となる。

(2)　X が最大値 8 をとる確率は，$\dfrac{{}_2\mathrm{C}_2\times{}_3\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_4}=\dfrac{1}{70}$ である。

(3)　X が最小値 1 をとる確率は，

$$\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_5\mathrm{C}_3+{}_2\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1\times{}_5\mathrm{C}_2+{}_3\mathrm{C}_1\times{}_5\mathrm{C}_3}{{}_{10}\mathrm{C}_4}=\frac{11}{21}$$

$X=1$ であり，しかも 3 色の玉がとり出される確率は，

$$\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1\times{}_5\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_4}=\frac{6}{21}$$

すると，X が最小値 1 をとるという条件の下で，3 色の玉がとり出される条件つき確率は，

$$\frac{\frac{6}{21}}{\frac{11}{21}}=\frac{6}{11}$$

赤	青	白	得点
2	2	0	8
2	0	2	6
2	1	1	5
1	3	0	3
1	0	3	1
1	1	2	1
1	2	1	3
0	0	4	2
0	1	3	1
0	3	1	3
0	2	2	4

[解 説]

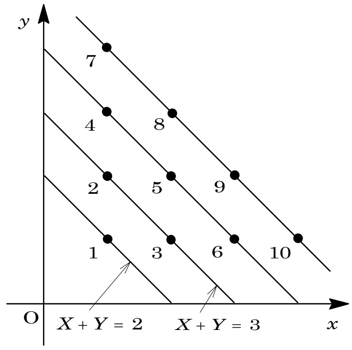
最初に少々時間はかかっても，上のような表をつくっておいた方がミスが少なくなります。これが，いったん完成すれば，2 分くらいで空欄は埋まります。

第6問（選択問題）

問題のページへ

(1) 50行から$Y=K-X$なので，$X+Y=K$

すると，$X+Y=2$上，$X+Y=3$上，……，$X+Y=N$上の格子点について，右図のようにXの小さい方から番号Sがつく。



$X+Y=K$上の格子点は，$1 \leqq X \leqq K-1$となるので, 40行は,

FOR X=1 TO K-1

(2) $N=3$のときは，$X+Y=2$，$X+Y=3$上の格子点が表示される。

1) 1 1

2) 1 2

3) 2 1

(3) $N=8$のときは，$X+Y=8$までの格子点が表示される。

10番目は$X+Y=5$上より，**10) 4 1**

また，$X+Y=6$上の最後の点は，$S=1+2+3+4+5=15$番目なので, 20番目は$X+Y=7$上の5番目となり,

20) 5 2

さらに，$X+Y=8$上の最後の点は，$S=1+2+3+4+5+6+7=28$番目で点$(7,\ 1)$となるので，最後から1つ前は,

27) 6 2

(4) 点$(4,\ 3)$は$X+Y=7$上より，この点が表示されるnの最小値は7である。また,そのとき，$X+Y=6$上の最後の点が15番目より，点$(4,\ 3)$は，$15+4=19$番目に表示される。

[解 説]

格子点に番号を付けていく問題で，その規則性をプログラムから把握すれば，あとは群数列の処理となります。もっともNの値がさほど大きくないので，全部，書き並べても大したことはありません。