第１問（必答問題）

問題のページへ

[1]　グラフ C: $y=(a^2+1)x^2+(2a-3)x-3$ ………①

(1)　①が点$(-1,\ 0)$を通るので，$(a^2+1)-(2a-3)-3=0$

$$a^2-2a+1=0,\ a=1$$

このとき①は，$y=2x^2-x-3$ ……②であり，$y=0$とすると，

$$2x^2-x-3=0,\ x=-1,\ \frac{3}{2}$$

よって，②とx軸の交点は$(-1,\ 0)$と$\left(\frac{3}{2},\ 0\right)$となる。

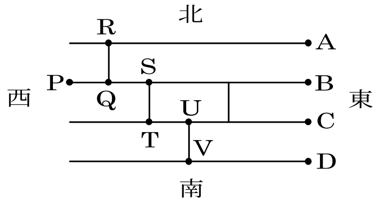
また②を変形すると，$y=2\left(x-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{25}{8}$となるので，$0\leqq x\leqq 3$ の範囲にあるとき，$x=\frac{1}{4}$で最小値$-\frac{25}{8}$，$x=3$で最大値 12 をとる。

(2)　①とy軸との交点が$y=-3$より，①はx軸との交点を正の部分に１つ，負の部分に１つもつ。

よって，①がx軸の$x\geqq 3$の部分で交わる条件は，$x=3$のとき$y\leqq 0$である。

$$9(a^2+1)+3(2a-3)-3\leqq 0,\ 3a^2+2a-1\leqq 0,\ -1\leqq a\leqq \frac{1}{3}$$

[2]　図のようにQ, R, S, T, U, Vを定める。



(1)　A に到達するのは P→Q→R→A の経路より，その確率は$\frac{2}{3}\times 1=\frac{2}{3}$である。

(2)　D に到達するのは P→Q→S→T→U→V→D の経路より，その確率は$\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times 1\times\frac{2}{3}\times 1=\frac{4}{27}$である。

(3)　B または C に到達するのは，A に到達する場合と D に到達する場合以外なので，その確率は, (1)(2)より，$1-\left(\frac{2}{3}+\frac{4}{27}\right)=\frac{5}{27}$である。

(4)　B, C に到達する場合，賞金はともに 1800 円なので，その期待値は,

$$200\times\frac{2}{3}+1800\times\frac{5}{27}+900\times\frac{4}{27}=600$$

[解 説]

[1]の(2)では，Cがつねに点$(0,\ -3)$を通ることに気付かないと，たとえば$x\geqq 3$でx軸に接する場合とかも検討しなくてはいけません。[2]では B, C に到達したときの賞金が同じという設定のため，ずいぶん計算量が減りました。

第 2 問（必答問題）

問題のページへ

[1]　$BQ=(x^2+x)^2-6(x^2+x)-(4k^2-9)=x^4+2x^3-5x^2-6x-4k^2+9$

(1)　$R=A-BQ=x+2k+1$ から, B を R で割って，$B=R(x-2k)+(4k^2-3)$

よって，商は $x-2k$，余りは $4k^2-3$ となる。

(2)　B が R で割り切れる条件は，$4k^2-3=0$，$k=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

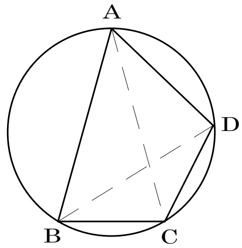
(3)　$k=\dfrac{1}{2}$ のとき，$Q=x^2+x-2$，$R=x+2$ より，Q を R で割ると，$Q=R(x-1)$

となり，余りは 0 となる。

(4)　$k=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ならば，(2)より B は R で割り切れ，$A=BQ+R$ なので A は R で割り切れる。逆に，A が R で割り切れるならば，$BQ=A-R$ から BQ は R で割り切れる。ところが(3)より，$k=\dfrac{1}{2}$ のとき Q は R で割り切れるので，このとき BQ は R で割り切れてしまう。

以上より，$k=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ であることは, A が R で割り切れるための十分条件であるが, 必要条件ではない。

[2]　△ABC に余弦定理を適用して，$\mathrm{AC}^2=9+3-2\cdot 3\cdot\sqrt{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{6}=9$ より，AC = 3



$\cos\angle\mathrm{ADC}=\cos(180°-\angle\mathrm{ABC})=-\cos\angle\mathrm{ABC}=-\dfrac{\sqrt{3}}{6}$ なので,

AD = x とおいて△ACD に余弦定理を適用すると,

$$9=x^2+3-2\cdot\sqrt{3}\cdot x\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{6}\right),\quad x^2+x-6=0$$

$x>0$ より AD = x = 2

さらに，$\sin\angle\mathrm{ABC}=\sqrt{1-\dfrac{3}{36}}=\dfrac{\sqrt{33}}{6}$ より，円 O の半径を R とし，△ABC に正弦定理を適用すると，$\dfrac{3}{\sin\angle\mathrm{ABC}}=2R$，$R=\dfrac{9}{\sqrt{33}}=\dfrac{3\sqrt{33}}{11}$

また，$\sin\angle\mathrm{BAD}=\sin(180°-\angle\mathrm{BCD})=\sin\angle\mathrm{BCD}$ より,

$$\frac{S_2}{S_1}=\frac{\triangle\mathrm{BCD}}{\triangle\mathrm{ABD}}=\frac{\mathrm{CB}\cdot\mathrm{CD}}{\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AD}}=\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{3\cdot 2}=\frac{1}{2}$$

[解 説]

[1]の(4)はおもしろい問題でした。(1)〜(3)までの結果がうまい誘導となっています。[2]では，昨年，一昨年と同じく円に内接する四角形が題材となっています。二度あることは三度あるということでしょう。

第3問（選択問題）

問題のページへ

(1)　$a_{13}=0$ より，$a+12d=0$ ………①

$b_3=a_{10}$ より，$ar^2=a+9d$ ………②

①②より，$ar^2=a+9\cdot\left(-\dfrac{a}{12}\right)$，$ar^2=\dfrac{1}{4}a$，$r^2=\dfrac{1}{4}$

$r>0$ より，$r=\dfrac{1}{2}$

(2)　$S_n=\dfrac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}<0$ とすると，$2a+(n-1)d<0$

①より，$2a+(n-1)\left(-\dfrac{a}{12}\right)<0$，$24-(n-1)<0$，$n>25$

よって，最小の n は 26 となる。

(3)　$S_{10}=25$ のとき，$\dfrac{10(2a+9d)}{2}=25$，$2a+9d=5$

①より，$2a+9\left(-\dfrac{a}{12}\right)=5$，$a=4$

よって，$\displaystyle\sum_{k=1}^{6}b_k=\sum_{k=1}^{6}4\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}=\frac{4\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^6\right\}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{63}{8}$

[解 説]

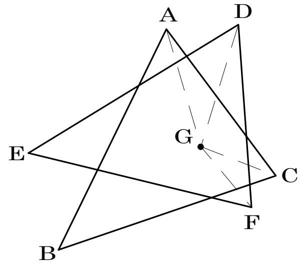
等差数列と等比数列に関するありふれた基本題です。本年の数列の問題は，斬新さが感じられませんでした。

第 4 問（選択問題）

問題のページへ

(1)　点 G を中心とする回転移動により，△DEF が△ABC に移ったとすると，D が A, F が C に移るのだから AG＝DG, CG＝FG である。

　ゆえに G は線分 AD の垂直二等分線と線分 CF の垂直二等分線の交点となる。



(2)　逆に，G が線分 AD の垂直二等分線と線分 CF の垂直二等分線の交点であると，AG＝DG，CG＝FG, AC＝DF だから，△DGF≡△AGC

　このとき，頂点 D は頂点 A に，頂点 G は頂点 G に，頂点 F は頂点 C にそれぞれ対応している。

　したがって，点 G のまわりに∠AGD だけ回転移動すれば△DGF は△AGC に移される。こうして，△DEF は△ABC に移される。

[解 説]

3 つの選択題のうちでは，いちばん扱いやすいものでした。親切すぎるぐらいの誘導で，空欄がどんどん埋まっていきます。来年は，この平面幾何の選択率がアップするかもしれません。

第5問（選択問題）

問題のページへ

(1)　実数解をもたないときは「整数の解なし」なので, 190 行は,

```
IF  D<0  THEN  GOTO  250
```

実数解が整数とならないときも「整数の解なし」なので, 210 行は,

```
IF  E-INT(E)>0  THEN  GOTO  250
```

また, ある $(B,\ C)$ で整数解をもつときは, 次の $(B,\ C)$ の値について検討すればよいので, 240 行は,

```
GOTO  260
```

(2)　$K=3,\ L=6,\ M=4,\ N=6$ のとき, 150 行と 160 行より,

$3 \leqq B \leqq 6,\ 4 \leqq C \leqq 6$

ここで, $D=B^2-4C$ より, $D \geqq 0$ の $(B,\ C)$ の組は $(4,\ 4)$, $(5,\ 4)$, $(5,\ 5)$, $(5,\ 6)$, $(6,\ 4)$, $(6,\ 5)$, $(6,\ 6)$ の 7 組となる。すると, 200 行はこれらの場合の 7 回実行される。

また, $E=\dfrac{-B+\sqrt{D}}{2}$ より, E が整数となる $(B,\ C)$ の組は, $D \geqq 0$ のうちで, $(4,\ 4)$, $(5,\ 4)$, $(5,\ 6)$, $(6,\ 5)$ の 4 組となる。すると, 220 行はこれらの場合の 4 回実行される。また S は整数解 E の個数を表すので, $S=4$ となる。

[解 説]

これまでの数ⅠAのコンピュータは超易というのが定説でしたが, 今年の問題では, 他の選択題と比べて難易に格段の差があるというわけではありませんでした。特に, 20 行のプログラムはこれまでで最長で, そのため問題が B5 の 1 枚で収まりませんでした。