２０２５ 入試対策

過去問ライブラリー

東京大学

文系数学 25か年

２０００ － ２０２４

外林 康治　編著

電送数学舎

2025 入試対策

東 京 大 学

文系数学 25 か年

ま え が き

本書には，2000 年度以降に出題された東京大学（前期日程）の文系数学の全問題とその解答例を掲載しています。

過去問から入試傾向をつかみ，そして演習をスムーズに進めるために，新課程入試に対応した内容分類を行いました。融合題の配置箇所は鍵となっている分野です。

注　「複素数平面」は範囲外ですので除外しました。

電子書籍の概略

1　本書のフォーマットは PDF です。閲覧には，「Adobe Acrobat Reader」などの PDF Viewer が必要になります。

2　問題と対応する解答例のページの間には，リンクが張られています。リンク元は，問題編の 1, 2,…などの問題番号，解答編の 問 題 の文字です。

3　2018 年度以降に出題された問題は，その解答例の動画解説を YouTube で配信しています。リンク元は，解答編の 解答例＋映像解説 です。

目　　次

分野別問題一覧

関　数／微分と積分／図形と式

図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

■ 関数

1　以下の問いに答えよ。必要ならば，$0.3<\log_{10}2<0.31$ であることを用いてよい。

(1)　$5^n>10^{19}$ となる最小の自然数 n を求めよ。

(2)　$5^m+4^m>10^{19}$ となる最小の自然数 m を求めよ。　[2024]

2　k を正の実数とし，2 次方程式 $x^2+x-k=0$ の 2 つの実数解を α，β とする。k が $k>2$ の範囲を動くとき，$\dfrac{\alpha^3}{1-\beta}+\dfrac{\beta^3}{1-\alpha}$ の最小値を求めよ。　[2023]

3　座標平面上の点 $(x,\ y)$ が次の方程式を満たす。

$$2x^2+4xy+3y^2+4x+5y-4=0$$

このとき，x のとりうる最大の値を求めよ。　[2012]

4　0 以上の実数 s, t が $s^2+t^2=1$ を満たしながら動くとき，方程式

$$x^4-2(s+t)x^2+(s-t)^2=0$$

の解のとる値の範囲を求めよ。　[2005]

■ 微分と積分

1　座標平面上で，放物線 $C: y=ax^2+bx+c$ が 2 点 $\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$，$\mathrm{Q}(-\cos\theta,\ \sin\theta)$ を通り，点 P と点 Q のそれぞれにおいて円 $x^2+y^2=1$ と共通の接線をもっている。ただし，$0^\circ<\theta<90^\circ$ とする。

(1)　a, b, c を $s=\sin\theta$ を用いて表せ。

(2)　放物線 C と x 軸で囲まれた図形の面積 A を s を用いて表せ。

(3)　$A\geqq\sqrt{3}$ を示せ。　[2024]

2　座標平面上の放物線 $y=3x^2-4x$ を C とおき，直線 $y=2x$ を l とおく。実数 t に対し，C 上の点 $\mathrm{P}(t,\ 3t^2-4t)$ と l の距離を $f(t)$ とする。

(1)　$-1\leqq a\leqq 2$ の範囲の実数 a に対し，定積分 $g(a)=\displaystyle\int_{-1}^{a}f(t)dt$ を求めよ。

(2)　a が $0\leqq a\leqq 2$ の範囲を動くとき，$g(a)-f(a)$ の最大値および最小値を求めよ。

[2023]

3　$y=x^3-x$ により定まる座標平面上の曲線を C とする。C 上の点 $\mathrm{P}(\alpha,\ \alpha^3-\alpha)$ を通り，点 P における C の接線と垂直に交わる直線を l とする。C と l は相異なる 3 点で交わるとする。

(1)　α のとりうる値の範囲を求めよ。

(2)　C と l の点 P 以外の 2 つの交点の x 座標を β，γ とする。ただし，$\beta<\gamma$ とする。$\beta^2+\beta\gamma+\gamma^2-1\neq 0$ となることを示せ。

(3)　(2)の β，γ を用いて，$u=4\alpha^3+\dfrac{1}{\beta^2+\beta\gamma+\gamma^2-1}$ と定める。このとき，u のとりうる値の範囲を求めよ。　[2022]

4　a を正の実数とする。座標平面上の曲線 C を $y=ax^3-2x$ で定める。原点を中心とする半径 1 の円と C の共有点の個数が 6 個であるような a の範囲を求めよ。

[2021]

5　$a>0$，$b>0$ とする。座標平面上の曲線 $C: y=x^3-3ax^2+b$ が，以下の 2 条件を満たすとする。

条件 1：C は x 軸に接する。

条件 2：x 軸と C で囲まれた領域（境界は含まない）に，x 座標と y 座標がともに整数である点がちょうど 1 個ある。

b を a で表し，a のとりうる値の範囲を求めよ。　[2020]

6　$a>0$ とし，$f(x)=x^3-3a^2x$ とおく。

(1)　$x\geqq 1$ で $f(x)$ が単調に増加するための，a についての条件を求めよ。

(2)　次の 2 条件を満たす点 $(a,\ b)$ の動きうる範囲を求め，座標平面上に図示せよ。

条件 1：方程式 $f(x)=b$ は相異なる 3 実数解をもつ。

条件 2：さらに，方程式 $f(x)=b$ の解を $\alpha<\beta<\gamma$ とすると $\beta>1$ である。

[2018]

7　座標平面において 2 つの放物線 $A: y=s(x-1)^2$ と $B: y=-x^2+t^2$ を考える。ただし s, t は実数で，$0<s$，$0<t<1$ を満たすとする。放物線 A と x 軸および y 軸で囲まれる領域の面積を P とし，放物線 B の $x\geqq 0$ の部分と x 軸および y 軸で囲まれる領域の面積を Q とする。A と B がただ 1 点を共有するとき，$\dfrac{Q}{P}$ の最大値を求めよ。

[2017]

8　座標平面上の 2 つの放物線 $A: y=x^2$，$B: y=-x^2+px+q$ が点 $(-1,\ 1)$ で接している。ここで，p と q は実数である。さらに，t を正の実数とし，放物線 B を x 軸の正の向きに $2t$，y 軸の正の向きに t だけ平行移動して得られる放物線を C とする。

(1)　p と q の値を求めよ。

(2)　放物線 A と C が囲む領域の面積を $S(t)$ とする。ただし，A と C が領域を囲まないときは $S(t)=0$ と定める。$S(t)$ を求めよ。

(3)　$t>0$ における $S(t)$ の最大値を求めよ。　[2016]

9　以下の問いに答えよ。

(1)　t を実数の定数とする。実数全体を定義域とする関数 $f(x)$ を

$$f(x)=-2x^2+8tx-12x+t^3-17t^2+39t-18$$

と定める。このとき，関数 $f(x)$ の最大値を t を用いて表せ。

(2)　(1)の「関数 $f(x)$ の最大値」を $g(t)$ とする。t が $t \geqq -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ の範囲を動くとき，$g(t)$ の最小値を求めよ。　[2014]

10　関数 $y=x(x-1)(x-3)$ のグラフを C，原点 O を通る傾き t の直線を l とし，C と l が O 以外に共有点をもつとする。C と l の共有点を O，P，Q とし，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$ と $|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|$ の積を $g(t)$ とおく。ただし，それら共有点の 1 つが接点である場合は，O, P, Q のうちの 2 つが一致して，その接点であるとする。関数 $g(t)$ の増減を調べ，その極値を求めよ。　[2013]

11　座標平面上の放物線 C を $y=x^2+1$ で定める。s，t は実数とし $t<0$ を満たすとする。点 $(s,\ t)$ から放物線 C へ引いた接線を l_1，l_2 とする。

(1)　l_1，l_2 の方程式を求めよ。

(2)　a を正の実数とする。放物線 C と直線 l_1，l_2 で囲まれる領域の面積が a となる $(s,\ t)$ をすべて求めよ。　[2012]

12　x の 3 次関数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ が，3 つの条件

$$f(1)=1,\ f(-1)=-1,\ \int_{-1}^{1}(bx^2+cx+d)\,dx=1$$

をすべて満たしているとする。このような $f(x)$ の中で定積分 $I=\displaystyle\int_{-1}^{\frac{1}{2}}\{f''(x)\}^2\,dx$ を最小にするものを求め，そのときの I の値を求めよ。ただし，$f''(x)$ は $f'(x)$ の導関数を表す。　[2011]

13　2 次関数 $f(x)=x^2+ax+b$ に対して，$f(x+1)=c\int_0^1(3x^2+4xt)f'(t)\,dt$ が x についての恒等式になるような定数 a, b, c の組をすべて求めよ。　[2010]

14　2 次以下の整式 $f(x)=ax^2+bx+c$ に対し，$S=\int_0^2|f'(x)|dx$ を考える。

(1)　$f(0)=0$，$f(2)=2$ のとき S を a の関数として表せ。

(2)　$f(0)=0$，$f(2)=2$ を満たしながら f が変化するとき, S の最小値を求めよ。

[2009]

15　$0\leqq\alpha\leqq\beta$ を満たす実数 α，β と，2 次式 $f(x)=x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta$ について，$\int_{-1}^1 f(x)dx=1$ が成立しているとする。このとき定積分 $S=\int_0^\alpha f(x)dx$ を α の式で表し, S がとりうる値の最大値を求めよ。　[2008]

16　θ は，$0°<\theta<45°$ の範囲の角度を表す定数とする。$-1\leqq x\leqq 1$ の範囲で，関数 $f(x)=|x+1|^3+|x-\cos 2\theta|^3+|x-1|^3$ が最小値をとるときの変数 x の値を，$\cos\theta$ で表せ。　[2006]

17　$f(x)$ を $f(0)=0$ を満たす 2 次関数とする。a, b を実数として，関数 $g(x)$ を次で与える。

$$g(x)=\begin{cases} ax & (x\leqq 0) \\ bx & (x>0) \end{cases}$$

a, b をいろいろ変化させ，$\int_{-1}^0\{f'(x)-g'(x)\}^2dx+\int_0^1\{f'(x)-g'(x)\}^2dx$ が最小になるようにする。このとき，$g(-1)=f(-1)$，$g(1)=f(1)$ であることを示せ。

[2005]

18　関数 $f(x)$，$g(x)$，$h(x)$ を次で定める。

$$f(x)=x^3-3x,\ g(x)=\{f(x)\}^3-3f(x),\ h(x)=\{g(x)\}^3-3g(x)$$

このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　a を実数とする。$f(x)=a$ を満たす実数 x の個数を求めよ。

(2)　$g(x)=0$ を満たす実数 x の個数を求めよ。

(3)　$h(x)=0$ を満たす実数 x の個数を求めよ。　[2004]

19　a, b, c を実数とし，$a \neq 0$ とする。2 次関数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ が次の条件(A), (B)を満たすとする。

(A)　$f(-1) = -1$，$f(1) = 1$，$f'(1) \leqq 6$

(B)　$-1 \leqq x \leqq 1$ を満たすすべての x に対し，$f(x) \leqq 3x^2 - 1$

このとき，積分 $I = \int_{-1}^{1} (f'(x))^2 dx$ の値のとりうる範囲を求めよ。　[2003]

20　2 つの関数 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$，$g(x) = px^3 + qx^2 + rx$ が次の 5 つの条件を満たしているとする。

$$f'(0) = g'(0),\ f(-1) = -1,\ f'(-1) = 0,\ g(1) = 3,\ g'(1) = 0$$

ここで，$f(x)$，$g(x)$ の導関数をそれぞれ $f'(x)$，$g'(x)$ で表している。

このような関数のうちで，定積分 $\int_{-1}^{0} \{f''(x)\}^2 dx + \int_{0}^{1} \{g''(x)\}^2 dx$ の値を最小にするような $f(x)$ と $g(x)$ を求めよ。ただし $f''(x)$，$g''(x)$ はそれぞれ $f'(x)$，$g'(x)$ の導関数を表す。　[2002]

21　時刻 0 に原点を出発した 2 点 A, B が xy 平面上を動く。点 A の時刻 t での座標は $(t^2,\ 0)$ で与えられる。点 B は，最初は y 軸上を y 座標が増加する方向に一定の速さ 1 で動くが，点 C$(0,\ 3)$ に到達した後は，その点から x 軸に平行な直線上を x 座標が増加する方向に同じ速さ 1 で動く。

$t>0$ のとき，三角形 ABC の面積を $S(t)$ とおく。

(1)　関数 $S(t)$ $(t>0)$ のグラフの概形を描け。

(2)　u を正の実数とするとき，$0<t \leqq u$ における $S(t)$ の最大値を $M(u)$ とおく。関数 $M(u)$ $(u>0)$ のグラフの概形を描け。　[2001]

■ 図形と式

1　座標平面上に 2 点 O(0, 0)，A(0, 1) をとる。x 軸上の 2 点 P(p, 0)，Q(q, 0) が，次の条件(i), (ii)をともに満たすとする。

(i)　$0<p<1$ かつ $p<q$

(ii)　線分 AP の中点を M とするとき，$\angle\mathrm{OAP}=\angle\mathrm{PMQ}$

(1)　q を p を用いて表せ。

(2)　$q=\dfrac{1}{3}$ となる p の値を求めよ。

(3)　△OAP の面積を S，△PMQ の面積を T とする。$S>T$ となる p の範囲を求めよ。

[2024]

2　a, b を実数とする。座標平面上の放物線 $y=x^2+ax+b$ を C とおく。C は，原点で垂直に交わる 2 本の接線 l_1，l_2 をもつとする。ただし，C と l_1 の接点 P_1 の x 座標は，C と l_2 の接点 P_2 の x 座標より小さいとする。

(1)　b を a で表せ。また a の値はすべての実数をとりうることを示せ。

(2)　$i=1$, 2 に対し，円 D_i を，放物線 C の軸上に中心をもち，点 P_i で l_i と接するものと定める。D_2 の半径が D_1 の半径の 2 倍となるとき，a の値を求めよ。　[2022]

3　a, b を実数とする。座標平面上の放物線 $C: y=x^2+ax+b$ は放物線 $y=-x^2$ と 2 つの共有点をもち，一方の共有点の x 座標は $-1<x<0$ を満たし，他方の共有点の x 座標は $0<x<1$ を満たす。

(1)　点 $(a,\ b)$ のとりうる範囲を座標平面上に図示せよ。

(2)　放物線 C の通りうる範囲を座標平面上に図示せよ。　[2021]

4　O を原点とする座標平面において，放物線 $y=x^2-2x+4$ のうち $x\geqq 0$ を満たす部分を C とする。

(1)　点 P が C 上を動くとき，O を端点とする半直線 OP が通過する領域を図示せよ。

(2)　実数 a に対して，直線 $l: y=ax$ を考える。次の条件を満たす a の範囲を求めよ。

C 上の点 A と l 上の点 B で，3 点 O, A, B が正三角形の 3 頂点となるものがある。　[2020]

5　座標平面の原点を O とし，O，A(1, 0)，B(1, 1)，C(0, 1) を辺の長さが 1 の正方形の頂点とする。3 点 P(p, 0)，Q(0, q)，R(r, 1) はそれぞれ辺 OA, OC, BC 上にあり，3 点 O, P, Q および 3 点 P, Q, R はどちらも面積が $\frac{1}{3}$ の三角形の 3 頂点であるとする。

(1)　q と r を p で表し，p, q, r それぞれのとりうる値の範囲を求めよ。

(2)　$\frac{\mathrm{CR}}{\mathrm{OQ}}$ の最大値，最小値を求めよ。　[2019]

6　O を原点とする座標平面において，点 A(2, 2) を通り，線分 OA と垂直な直線を l とする。座標平面上を点 P(p, q) が次の 2 つの条件を満たしながら動く。

条件 1：$8 \leqq \overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}} \leqq 17$

条件 2：点 O と直線 l の距離を c とし，点 P(p, q) と直線 l の距離を d とするとき

$$cd \geqq (p-1)^2$$

このとき，P が動く領域を D とする。さらに，x 軸の正の部分と線分 OP のなす角を θ とする。

(1)　D を図示し，その面積を求めよ。

(2)　$\cos\theta$ のとりうる値の範囲を求めよ。　[2019]

7　O を原点とする座標平面を考える。不等式 $|x|+|y| \leqq 1$ が表す領域を D とする。また，点 P, Q が領域 D を動くとき，$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を満たす点 R が動く範囲を E とする。

(1)　D, E をそれぞれ図示せよ。

(2)　a, b を実数とし，不等式 $|x-a|+|y-b| \leqq 1$ が表す領域を F とする。点 S, T が領域 F を動くとき，$\overrightarrow{\mathrm{OU}} = \overrightarrow{\mathrm{OS}} - \overrightarrow{\mathrm{OT}}$ を満たす点 U が動く範囲を G とする。G は E と一致することを示せ。　[2019]

8　座標平面上に放物線 C を $y = x^2 - 3x + 4$ で定め，領域 D を $y \geqq x^2 - 3x + 4$ で定める。原点を通る 2 直線 l, m は C に接するものとする。

(1)　放物線 C 上を動く点 A と直線 l, m の距離をそれぞれ L, M とする。$\sqrt{L} + \sqrt{M}$ が最小値をとるときの点 A の座標を求めよ。

(2)　次の条件を満たす点 P(p, q) の動きうる範囲を求め，座標平面上に図示せよ。

条件：領域 D のすべての点 (x, y) に対し不等式 $px + qy \leqq 0$ が成り立つ。

[2018]

9　放物線 $y=x^2$ のうち $-1 \leqq x \leqq 1$ を満たす部分を C とする。座標平面上の原点 O と点 A(1, 0) を考える。

(1)　点 P が C 上を動くとき，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=2\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を満たす点 Q の軌跡を求めよ。

(2)　点 P が C 上を動き，点 R が線分 OA 上を動くとき，$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=2\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ を満たす点 S が動く領域を座標平面上に図示し，その面積を求めよ。　[2018]

10　座標平面上の 3 点 $\mathrm{P}(x,\ y)$，$\mathrm{Q}(-x,\ -y)$，$\mathrm{R}(1,\ 0)$ が鋭角三角形をなすための $(x,\ y)$ についての条件を求めよ。また，その条件を満たす点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の範囲を図示せよ。　[2016]

11　座標平面上の 2 点 $\mathrm{A}(-1,\ 1)$，$\mathrm{B}(1,\ -1)$ を考える。また，P を座標平面上の点とし，その x 座標の絶対値は 1 以下であるとする。次の条件(i)または(ii)を満たす点 P の範囲を図示し，その面積を求めよ。

(i)　頂点の x 座標の絶対値が 1 以上の 2 次関数のグラフで，点 A, P, B をすべて通るものがある。

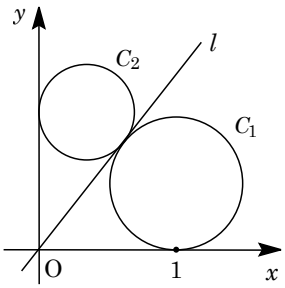
(ii)　点 A, P, B は同一直線上にある。　[2015]

12　l を座標平面上の原点を通り傾きが正の直線とする。さらに，以下の 3 条件(i), (ii), (iii)で定まる円 C_1，C_2 を考える。

(i)　円 C_1，C_2 は 2 つの不等式 $x \geqq 0$，$y \geqq 0$ で定まる領域に含まれる。

(ii)　円 C_1，C_2 は直線 l と同一点で接する。

(iii)　円 C_1 は x 軸と点 $(1,\ 0)$ で接し，円 C_2 は y 軸と接する。



円 C_1 の半径を r_1，円 C_2 の半径を r_2 とする。$8r_1+9r_2$ が最小となるような直線 l の方程式と，その最小値を求めよ。　[2015]

13　座標平面の原点を O で表す。線分 $y=\sqrt{3}x$ $(0 \leqq x \leqq 2)$ 上の点 P と，線分 $y=-\sqrt{3}x$ $(-3 \leqq x \leqq 0)$ 上の点 Q が，線分 OP と線分 OQ の長さの和が 6 となるように動く。このとき，線分 PQ の通過する領域を D とする。

(1)　s を $-3 \leqq s \leqq 2$ を満たす実数とするとき，点 $(s,\ t)$ が D に入るような t の範囲を求めよ。

(2)　D を図示せよ。　[2014]

14　座標平面上の 3 点 $\mathrm{P}(0,\ -\sqrt{2})$，$\mathrm{Q}(0,\ \sqrt{2})$，$\mathrm{A}(a,\ \sqrt{a^2+1})$　$(0 \leqq a \leqq 1)$ を考える。

(1)　2 つの線分の長さの差 $\mathrm{PA}-\mathrm{AQ}$ は a によらない定数であることを示し，その値を求めよ。

(2)　Q を端点とし A を通る半直線と放物線 $y=\dfrac{\sqrt{2}}{8}x^2$ との交点を B とする。点 B から直線 $y=2$ へ下ろした垂線と直線 $y=2$ との交点を C とする。このとき，線分の長さの和 $\mathrm{PA}+\mathrm{AB}+\mathrm{BC}$ は a によらない定数であることを示し，その値を求めよ。

[2013]

15　$a,\ b$ を実数の定数とする。実数 $x,\ y$ が $x^2+y^2 \leqq 25$，$2x+y \leqq 5$ をともに満たすとき，$z=x^2+y^2-2ax-2by$ の最小値を求めよ。　[2013]

16　実数 t は $0<t<1$ を満たすとし，座標平面上の 4 点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(0,\ 1)$，$\mathrm{B}(1,\ 0)$，$\mathrm{C}(t,\ 0)$ を考える。また線分 AB 上の点 D を $\angle\mathrm{ACO}=\angle\mathrm{BCD}$ となるように定める。t を動かしたときの三角形 ACD の面積の最大値を求めよ。　[2012]

17　座標平面上の 1 点 $\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{4}\right)$ をとる。放物線 $y=x^2$ 上の 2 点 $\mathrm{Q}(\alpha,\ \alpha^2)$，$\mathrm{R}(\beta,\ \beta^2)$ を，3 点 P, Q, R が QR を底辺とする二等辺三角形をなすように動かすとき，$\triangle\mathrm{PQR}$ の重心 $\mathrm{G}(X,\ Y)$ の軌跡を求めよ。　[2011]

18　O を原点とする座標平面上に点 $\mathrm{A}(-3,\ 0)$ をとり，$0^\circ<\theta<120^\circ$ の範囲にある θ に対して，次の条件(i), (ii)を満たす 2 点 B, C を考える。

(i)　B は $y>0$ の部分にあり，$\mathrm{OB}=2$ かつ $\angle\mathrm{AOB}=180^\circ-\theta$ である。

(ii)　C は $y<0$ の部分にあり，$\mathrm{OC}=1$ かつ $\angle\mathrm{BOC}=120^\circ$ である。ただし $\triangle\mathrm{ABC}$ は O を含むものとする。

以下の問(1), (2)に答えよ。

(1)　$\triangle\mathrm{OAB}$ と $\triangle\mathrm{OAC}$ の面積が等しいとき，θ の値を求めよ。

(2)　θ を $0^\circ<\theta<120^\circ$ の範囲で動かすとき，$\triangle\mathrm{OAB}$ と $\triangle\mathrm{OAC}$ の面積の和の最大値と，そのときの $\sin\theta$ の値を求めよ。　[2010]

19 座標平面において原点を中心とする半径 2 の円をC_1とし，点$(1,\ 0)$を中心とする半径 1 の円をC_2とする。また，点$(a,\ b)$を中心とする半径 t の円C_3が，C_1に内接し，かつC_2に外接すると仮定する。ただし, b は正の実数とする。

(1) a, b を t を用いて表せ。また, t がとり得る値の範囲を求めよ。

(2) t が(1)で求めた範囲を動くとき, b の最大値を求めよ。 [2009]

20 座標平面上の 3 点$\mathrm{A}(1,\ 0)$，$\mathrm{B}(-1,\ 0)$，$\mathrm{C}(0,\ -1)$に対し，$\angle\mathrm{APC}=\angle\mathrm{BPC}$を満たす点 P の軌跡を求めよ。ただし，$\mathrm{P}\neq\mathrm{A},\ \mathrm{B},\ \mathrm{C}$とする。 [2008]

21 連立不等式 $y(y-|x^2-5|+4)\leqq 0$，$y+x^2-2x-3\leqq 0$ の表す領域を D とする。

(1) D を図示せよ。

(2) D の面積を求めよ。 [2007]

22 xy 平面の放物線 $y=x^2$ 上の 3 点 P, Q, R が次の条件を満たしている。

△PQR は 1 辺の長さ a の正三角形であり，点 P, Q を通る直線の傾きは$\sqrt{2}$である。

このとき, a の値を求めよ。 [2004]

23 a を正の実数とする。次の 2 つの不等式を同時に満たす点$(x,\ y)$全体からなる領域を D とする。

$$y\geqq x^2,\quad y\leqq -2x^2+3ax+6a^2$$

領域 D における $x+y$ の最大値, 最小値を求めよ。 [2004]

24 $a,\ b$ を実数とする。次の 4 つの不等式を同時に満たす点$(x,\ y)$全体からなる領域を D とする。

$$x+3y\geqq a,\quad 3x+y\geqq b,\quad x\geqq 0,\quad y\geqq 0$$

領域 D における $x+y$ の最小値を求めよ。 [2003]

25 2 つの放物線 $y=2\sqrt{3}(x-\cos\theta)^2+\sin\theta$，$y=-2\sqrt{3}(x+\cos\theta)^2-\sin\theta$ が相異なる 2 点で交わるようなθの範囲を求めよ。ただし，$0^\circ\leqq\theta<360^\circ$とする。 [2002]

26 xy 平面内の領域$-1\leqq x\leqq 1$，$-1\leqq y\leqq 1$において，$1-ax-by-axy$の最小値が正となるような定数 a, b を座標とする点$(a,\ b)$の範囲を図示せよ。 [2000]

■ 図形と計量

1　半径 1 の球面上の相異なる 4 点 A, B, C, D が，$\mathrm{AB}=1$，$\mathrm{AC}=\mathrm{BC}$，$\mathrm{AD}=\mathrm{BD}$，$\cos\angle\mathrm{ACB}=\cos\angle\mathrm{ADB}=\dfrac{4}{5}$ を満たしているとする。

(1)　三角形 ABC の面積を求めよ。

(2)　四面体 ABCD の体積を求めよ。　[2023]

2　C を半径 1 の円周とし，A を C 上の 1 点とする。3 点 P, Q, R が A を時刻 $t=0$ に出発し，C 上を各々一定の速さで，P, Q は反時計回りに，R は時計回りに，時刻 $t=2\pi$ まで動く。P, Q, R の速さは，それぞれ m, 1, 2 であるとする(したがって，Q は C をちょうど一周する)。ただし，m は $1\leqq m\leqq 10$ を満たす整数である。△PQR が PR を斜辺とする直角二等辺三角形となるような速さ m と時刻 t の組をすべて求めよ。

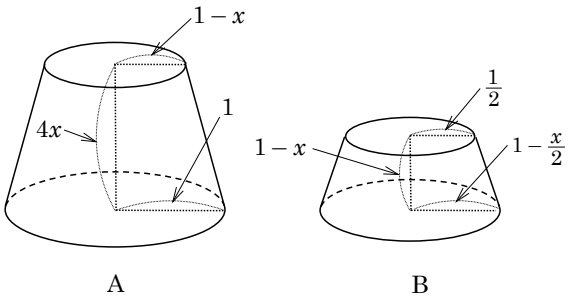
[2010]

3　四角形 ABCD が，半径 $\dfrac{65}{8}$ の円に内接している。この四角形の周の長さが 44 で，辺 BC と辺 CD の長さがいずれも 13 であるとき，残りの 2 辺 AB と DA の長さを求めよ。　[2006]

4　半径 r の球面上に 4 点 A, B, C, D がある。四面体 ABCD の各辺の長さは，$\mathrm{AB}=\sqrt{3}$，$\mathrm{AC}=\mathrm{AD}=\mathrm{BC}=\mathrm{BD}=\mathrm{CD}=2$ を満たしている。このとき r の値を求めよ。

[2001]

5　図のように底面の半径 1，上面の半径 $1-x$，高さ $4x$ の直円すい台 A と，底面の半径 $1-\dfrac{x}{2}$，上面の半径 $\dfrac{1}{2}$，高さ $1-x$ の直円すい台 B がある。ただし，$0\leqq x\leqq 1$ である。A と B の体積の和を $V(x)$ とするとき，$V(x)$ の最大値を求めよ。　[2000]



■ ベクトル

1　1 辺の長さが 1 の正六角形 ABCDEF が与えられている。点 P が辺 AB 上を，点 Q が辺 CD 上をそれぞれ独立に動くとき，線分 PQ を $2:1$ に内分する点 R が通りうる範囲の面積を求めよ。 [2017]

■ 整数と数列

1　数列 $\{a_n\}$ を次のように定める。

$$a_1 = 4,\ a_{n+1} = a_n^{\ 2} + n(n+2)\quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(1)　a_{2022} を 3 で割った余りを求めよ。

(2)　a_{2022}，a_{2023}，a_{2024} の最大公約数を求めよ。 [2022]

2　以下の問いに答えよ。

(1)　正の奇数 $K,\ L$ と正の整数 $A,\ B$ が $KA = LB$ を満たしているとする。K を 4 で割った余りが L を 4 で割った余りと等しいならば，A を 4 で割った余りは B を 4 で割った余りと等しいことを示せ。

(2)　正の整数 $a,\ b$ が $a > b$ を満たしているとする。このとき，$A = {}_{4a+1}\mathrm{C}_{4b+1}$，$B = {}_{a}\mathrm{C}_{b}$ に対して $KA = LB$ となるような正の奇数 K, L が存在することを示せ。

(3)　$a,\ b$ は(2)の通りとし，さらに $a - b$ が 2 で割り切れるとする。${}_{4a+1}\mathrm{C}_{4b+1}$ を 4 で割った余りは ${}_{a}\mathrm{C}_{b}$ を 4 で割った余りと等しいことを示せ。

(4)　${}_{2021}\mathrm{C}_{37}$ を 4 で割った余りを求めよ。 [2021]

3 n, k を，$1 \leqq k \leqq n$ を満たす整数とする。n 個の整数 2^m $(m=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$ から異なる k 個を選んでそれらの積をとる。k 個の整数の選び方すべてに対しこのように積をとることにより得られる ${}_n\mathrm{C}_k$ 個の整数の和を $a_{n,k}$ とおく。例えば,

$$a_{4,3}=2^0\cdot 2^1\cdot 2^2+2^0\cdot 2^1\cdot 2^3+2^0\cdot 2^2\cdot 2^3+2^1\cdot 2^2\cdot 2^3=120$$

である。

(1) 2 以上の整数 n に対し，$a_{n,2}$ を求めよ。

(2) 1 以上の整数 n に対し, x についての整式

$$f_n(x)=1+a_{n,1}x+a_{n,2}x^2+\cdots+a_{n,n}x^n$$

を考える。$\dfrac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}$ と $\dfrac{f_{n+1}(x)}{f_n(2x)}$ を x についての整式として表せ。

(3) $\dfrac{a_{n+1,k+1}}{a_{n,k}}$ を n, k で表せ。 [2020]

4 数列 a_1，a_2，$\cdots$ を，$a_n=\dfrac{{}_{2n}\mathrm{C}_n}{n!}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ で定める。

(1) a_7 と 1 の大小を調べよ。

(2) $n \geqq 2$ とする。$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}<1$ を満たす n の範囲を求めよ。

(3) a_n が整数となる $n \geqq 1$ をすべて求めよ。 [2018]

5 $p=2+\sqrt{5}$ とおき，自然数 $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して，$a_n=p^n+\left(-\dfrac{1}{p}\right)^n$ と定める。以下の問いに答えよ。ただし設問(1)は結論のみを書けばよい。

(1) a_1，a_2 の値を求めよ。

(2) $n \geqq 2$ とする。積 a_1a_n を，a_{n+1} と a_{n-1} を用いて表せ。

(3) a_n は自然数であることを示せ。

(4) a_{n+1} と a_n の最大公約数を求めよ。 [2017]

6 以下の問いに答えよ。ただし, (1)については, 結論のみを書けばよい。

(1) n を正の整数とし，3^n を 10 で割った余りを a_n とする。a_n を求めよ。

(2) n を正の整数とし，3^n を 4 で割った余りを b_n とする。b_n を求めよ。

(3) 数列 $\{x_n\}$ を次のように定める。

$$x_1=1,\ x_{n+1}=3^{x_n}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

x_{10} を 10 で割った余りを求めよ。 [2016]

7　r を 0 以上の整数とし，数列 $\{a_n\}$ を次のように定める。

$$a_1 = r,\ a_2 = r+1,\ a_{n+2} = a_{n+1}(a_n+1)\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

また，素数 p を 1 つとり，a_n を p で割った余りを b_n とする。ただし，0 を p で割った余りは 0 とする。

(1)　自然数 n に対し，b_{n+2} は $b_{n+1}(b_n+1)$ を p で割った余りと一致することを示せ。

(2)　$r=2$，$p=17$ の場合に，10 以下のすべての自然数 n に対して，b_n を求めよ。

(3)　ある 2 つの相異なる自然数 n, m に対して，

$$b_{n+1} = b_{m+1} > 0,\ b_{n+2} = b_{m+2}$$

が成り立ったとする。このとき，$b_n = b_m$ が成り立つことを示せ。　[2014]

8　実数 x の小数部分を，$0 \leqq y < 1$ かつ $x-y$ が整数となる実数 y のこととし，これを記号 $\langle x \rangle$ で表す。実数 a に対して，無限数列 $\{a_n\}$ の各項 a_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を次のように順次定める。

(i)　$a_1 = \langle a \rangle$

(ii)　$\begin{cases} a_n \neq 0 \text{ のとき，} a_{n+1} = \left\langle \dfrac{1}{a_n} \right\rangle \\ a_n = 0 \text{ のとき，} a_{n+1} = 0 \end{cases}$

(1)　$a = \sqrt{2}$ のとき，数列 $\{a_n\}$ を求めよ。

(2)　任意の自然数 n に対して $a_n = a$ となるような $\dfrac{1}{3}$ 以上の実数 a をすべて求めよ。

[2011]

9　p, q を 2 つの正の整数とする。整数 a, b, c で条件

$$-q \leqq b \leqq 0 \leqq a \leqq p,\ b \leqq c \leqq a$$

を満たすものを考え，このような $a,\ b,\ c$ を $[a,\ b\,;c]$ の形に並べたものを $(p,\ q)$ パターンと呼ぶ。各 $(p,\ q)$ パターン $[a,\ b\,;c]$ に対して

$$w([a,\ b\,;c]) = p-q-(a+b)$$

とおく。

(1)　$(p,\ q)$ パターンのうち，$w([a,\ b\,;c]) = -q$ となるものの個数を求めよ。また，$w([a,\ b\,;c]) = p$ となる $(p,\ q)$ パターンの個数を求めよ。

以下，$p=q$ の場合を考える。

(2)　s を p 以下の整数とする。$(p,\ p)$ パターンで $w([a,\ b\,;c]) = -p+s$ となるものの個数を求めよ。　[2011]

10　自然数 $m \geqq 2$ に対し，$m-1$ 個の二項係数 ${}_m\mathrm{C}_1$，${}_m\mathrm{C}_2$，…，${}_m\mathrm{C}_{m-1}$ を考え，これらすべての最大公約数を d_m とする。すなわち d_m はこれらすべてを割り切る最大の自然数である。

(1)　m が素数ならば，$d_m = m$ であることを示せ。

(2)　すべての自然数 k に対し，$k^m - k$ が d_m で割り切れることを，k に関する数学的帰納法よって示せ。　[2009]

11　p を自然数とする。次の関係式で定められる数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ を考える。

$$a_1 = p,\ b_1 = p+1$$

$$a_{n+1} = a_n + pb_n,\ b_{n+1} = pa_n + (p+1)b_n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(1)　$n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対し，次の 2 つの数がともに p^3 で割り切れることを示せ。

$$a_n - \frac{n(n-1)}{2}p^2 - np,\ b_n - n(n-1)p^2 - np - 1$$

(2)　p を 3 以上の奇数とする。このとき，a_p は p^2 で割り切れるが，p^3 では割り切れないことを示せ。　[2008]

12　r は $0 < r < 1$ を満たす実数，n は 2 以上の整数とする。平面上に与えられた 1 つの円を，次の条件①，②を満たす 2 つの円で置き換える操作(P)を考える。

①　新しい 2 つの円の半径の比は $r : 1-r$ で，半径の和はもとの円の半径に等しい。

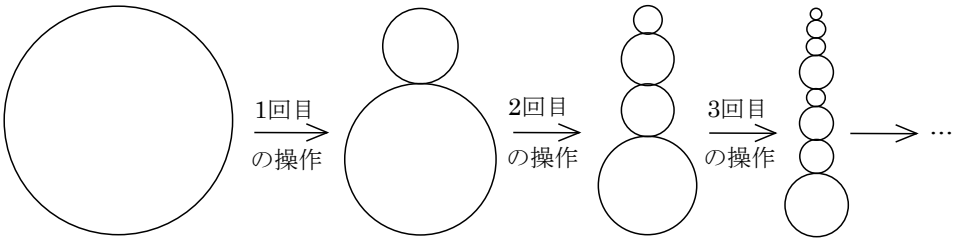
②　新しい 2 つの円は互いに外接し，もとの円に内接する。

以下のようにして，平面上に 2^n 個の円を作る。

・最初に，平面上に半径 1 の円を描く。

・次に，この円に対して操作(P)を行い，2 つの円を得る(これを 1 回目の操作という)。

・k 回目の操作で得られた 2^k 個の円のそれぞれについて，操作(P)を行い，2^{k+1} 個の円を得る $(1 \leqq k \leqq n-1)$。



(1)　n 回目の操作で得られる 2^n 個の円の周の長さの和を求めよ。

(2)　2 回目の操作で得られる 4 つの円の面積の和を求めよ。

(3)　n 回目の操作で得られる 2^n 個の円の面積の和を求めよ。　[2007]

13　正の整数の下 2 桁とは，100 の位以上を無視した数をいう。たとえば，2000，12345 の下 2 桁はそれぞれ 0，45 である。m が正の整数全体を動くとき，$5m^4$ の下 2 桁として現れる数をすべて求めよ。 [2007]

14　n を正の整数とする。実数 x，y，z に対する方程式 $x^n+y^n+z^n=xyz$ ……①を考える。

(1)　$n=1$ のとき，①を満たす正の整数の組 $(x,\ y,\ z)$ で，$x \leqq y \leqq z$ となるものをすべて求めよ。

(2)　$n=3$ のとき，①を満たす正の実数の組 $(x,\ y,\ z)$ は存在しないことを示せ。

[2006]

15　3 以上 9999 以下の奇数 a で，a^2-a が 10000 で割り切れるものをすべて求めよ。 [2005]

16　2 次方程式 $x^2-4x+1=0$ の 2 つの実数解のうち大きいものを α，小さいものを β とする。$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対し，$s_n=\alpha^n+\beta^n$ とおく。

(1)　s_1，s_2，s_3 を求めよ。また，$n \geqq 3$ に対し，s_n を s_{n-1} と s_{n-2} で表せ。

(2)　s_n は正の整数であることを示し，s_{2003} の 1 の位の数を求めよ。

(3)　α^{2003} 以下の最大の整数の 1 の位の数を求めよ。 [2003]

17　n は正の整数とする。x^{n+1} を x^2-x-1 で割った余りを a_nx+b_n とおく。

(1)　数列 a_n，b_n $(n=1,\ 2,\ 3\cdots)$ は，$a_{n+1}=a_n+b_n$，$b_{n+1}=a_n$ を満たすことを示せ。

(2)　$n=1,\ 2,\ 3\cdots$ に対して，a_n，b_n はともに正の整数で，互いに素であることを証明せよ。 [2002]

■ 確率

1　n を 5 以上の奇数とする。平面上の点 O を中心とする円をとり，それに内接する正 n 角形を考える。n 個の頂点から異なる 4 点を同時に選ぶ。ただし，どの 4 点も等確率で選ばれるものとする。選んだ 4 点を頂点とする四角形が O を内部に含む確率 p_n を求めよ。 [2024]

2　黒玉 3 個，赤玉 4 個，白玉 5 個が入っている袋から玉を 1 個ずつ取り出し，取り出した玉を順に横一列に 12 個すべて並べる。ただし，袋から個々の玉が取り出される確率は等しいものとする。

(1)　どの赤玉も隣り合わない確率 p を求めよ。

(2)　どの赤玉も隣り合わないとき，どの黒玉も隣り合わない条件付き確率 q を求めよ。

[2023]

3　O を原点とする座標平面上で考える。0 以上の整数 k に対して，ベクトル $\overrightarrow{v_k}$ を $\overrightarrow{v_k}=\left(\cos\dfrac{2k\pi}{3},\ \sin\dfrac{2k\pi}{3}\right)$ と定める。投げたとき表と裏がどちらも $\dfrac{1}{2}$ の確率で出るコインを N 回投げて，座標平面上に点 X_0，X_1，X_2，…，X_N を以下の規則(i), (ii)に従って定める。

(i)　X_0 は O にある。

(ii)　n を 1 以上 N 以下の整数とする。X_{n-1} が定まったとし，X_n を次のように定める。

・n 回目のコイン投げで表が出た場合，$\overrightarrow{\mathrm{OX}_n}=\overrightarrow{\mathrm{OX}_{n-1}}+\overrightarrow{v_k}$ により X_n を定める。ただし，k は 1 回目から n 回目までのコイン投げで裏が出た回数とする。

・n 回目のコイン投げで裏が出た場合，X_n を X_{n-1} と定める。

(1)　$N=5$ とする。X_5 が O にある確率を求めよ。

(2)　$N=98$ とする。X_{98} が O にあり，かつ，表が 90 回，裏が 8 回出る確率を求めよ。

[2022]

4　N を 5 以上の整数とする。1 以上 $2N$ 以下の整数から，相異なる N 個の整数を選ぶ。ただし 1 は必ず選ぶこととする。選んだ数の集合を S とし，S に関する以下の条件を考える。

条件 1：S は連続する 2 個の整数からなる集合を 1 つも含まない。

条件 2：S は連続する $N-2$ 個の整数からなる集合を少なくとも 1 つ含む。

ただし，2 以上の整数 k に対して，連続する k 個の整数からなる集合とは，ある整数 l を用いて $\{l,\ l+1,\ \cdots\cdots,\ l+k-1\}$ と表される集合を指す。たとえば $\{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\}$ は連続する 3 個の整数からなる集合 $\{1,\ 2,\ 3\}$，$\{7,\ 8,\ 9\}$，$\{8,\ 9,\ 10\}$ を含む。

(1)　条件 1 を満たすような選び方は何通りあるか。

(2)　条件 2 を満たすような選び方は何通りあるか。　[2021]

5　座標平面上に 8 本の直線 $x=a$ $(a=1,\ 2,\ 3,\ 4)$，$y=b$ $(b=1,\ 2,\ 3,\ 4)$ がある。以下，16 個の点 $(a,\ b)$ $(a=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ b=1,\ 2,\ 3,\ 4)$ から異なる 5 個の点を選ぶことを考える。

(1)　次の条件を満たす 5 個の点の選び方は何通りあるか。

上の 8 本の直線のうち，選んだ点を 1 個も含まないものがちょうど 2 本ある。

(2)　次の条件を満たす 5 個の点の選び方は何通りあるか。

上の 8 本の直線は，いずれも選んだ点を少なくとも 1 個含む。　[2020]

6　正八角形の頂点を反時計回りに A, B, C, D, E, F, G, H とする。また，投げたとき表裏の出る確率がそれぞれ $\dfrac{1}{2}$ のコインがある。

点 P が最初に点 A にある。次の操作を 10 回繰り返す。

操作：コインを投げ，表が出れば点 P を反時計回りに隣接する頂点に移動させ，裏が出れば点 P を時計回りに隣接する頂点に移動させる。

例えば，点 P が点 H にある状態で，投げたコインの表が出れば点 A に移動させ，裏が出れば点 G に移動させる。

以下の事象を考える。

事象 S：操作を 10 回行った後に点 P が点 A にある。

事象 T：1 回目から 10 回目の操作によって，点 P は少なくとも 1 回，点 F に移動する。

(1)　事象 S が起こる確率を求めよ。

(2)　事象 S と事象 T がともに起こる確率を求めよ。　[2019]

7　座標平面上で x 座標と y 座標がいずれも整数である点を格子点という。格子点上を次の規則(a), (b)に従って動く点 P を考える。

(a)　最初に，点 P は原点 O にある。

(b)　ある時刻で点 P が格子点 $(m,\ n)$ にあるとき，その 1 秒後の点 P の位置は，隣接する格子点 $(m+1,\ n)$，$(m,\ n+1)$，$(m-1,\ n)$，$(m,\ n-1)$ のいずれかであり，また，これらの点に移動する確率は，それぞれ $\dfrac{1}{4}$ である。

(1)　最初から 1 秒後の点 P の座標を $(s,\ t)$ とする。$t-s=-1$ となる確率を求めよ。

(2)　点 P が，最初から 6 秒後に直線 $y=x$ 上にある確率を求めよ。　[2017]

8　A, B, C の 3 つのチームが参加する野球の大会を開催する。以下の方式で試合を行い，2 連勝したチームが出た時点で，そのチームを優勝チームとして大会は終了する。

(a)　1 試合目で A と B が対戦する。

(b)　2 試合目で，1 試合目の勝者と，1 試合目で待機していた C が対戦する。

(c)　k 試合目で優勝チームが決まらない場合は，k 試合目の勝者と，k 試合目で待機していたチームが $k+1$ 試合目で対戦する。ここで k は 2 以上の整数とする。

なお，すべての対戦において，それぞれのチームが勝つ確率は $\frac{1}{2}$ で，引き分けはないものとする。

(1)　ちょうど 5 試合目で A が優勝する確率を求めよ。

(2)　n を 2 以上の整数とする。ちょうど n 試合目で A が優勝する確率を求めよ。

(3)　m を正の整数とする。総試合数が $3m$ 回以下で A が優勝する確率を求めよ。

[2016]

9　投げたとき表と裏の出る確率がそれぞれ $\frac{1}{2}$ のコインを 1 枚用意し，次のように左から順に文字を書く。

コインを投げ，表が出たときは文字列 AA を書き，裏が出たときは文字 B を書く。さらに繰り返しコインを投げ，同じ規則に従って，AA, B をすでにある文字列の右側につなげて書いていく。

たとえば，コインを 5 回投げ，その結果が順に表，裏，裏，表，裏であったとすると，得られる文字列は，AABBAAB となる。このとき，左から 4 番目の文字は B，5 番目の文字は A である。

(1)　n を正の整数とする。n 回コインを投げ，文字列を作るとき，文字列の左から n 番目の文字が A となる確率を求めよ。

(2)　n を 2 以上の整数とする。n 回コインを投げ，文字列を作るとき，文字列の左から $n-1$ 番目の文字が A で，かつ n 番目の文字が B となる確率を求めよ。　[2015]

10 a を自然数（すなわち 1 以上の整数）の定数とする。白球と赤球があわせて 1 個以上入っている袋 U に対して，次の操作(＊)を考える。

(＊)　袋 U から球を 1 個取り出し，

(i)　取り出した球が白球のときは，袋 U の中身が白球 a 個，赤球 1 個となるようにする。

(ii)　取り出した球が赤球のときは，その球を袋 U へ戻すことなく，袋 U の中身はそのままにする。

はじめに袋 U の中に，白球が $a+2$ 個，赤球が 1 個入っているとする。この袋 U に対して操作(＊)を繰り返し行う。たとえば，1 回目の操作で白球が出たとすると，袋 U の中身は白球 a 個，赤球 1 個となり，さらに 2 回目の操作で赤球が出たとすると，袋 U の中身は白球 a 個のみとなる。

n 回目に取り出した球が赤球である確率を p_n とする。ただし，袋 U の中の個々の球の取り出される確率は等しいものとする。

(1)　p_1，p_2 を求めよ。

(2)　$n \geqq 3$ に対して p_n を求めよ。　[2014]

11 A，B の 2 人がいる。投げたとき表裏が出る確率がそれぞれ $\frac{1}{2}$ のコインが 1 枚あり，最初は A がそのコインを持っている。次の操作を繰り返す。

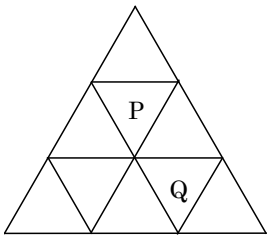
(i)　A がコインを持っているときは，コインを投げ，表が出れば A に 1 点を与え，コインは A がそのまま持つ。裏が出れば，両者に点を与えず，A はコインを B に渡す。

(ii)　B がコインを持っているときは，コインを投げ，表が出れば B に 1 点を与え，コインは B がそのまま持つ。裏が出れば，両者に点を与えず，B はコインを A に渡す。

そして A，B のいずれかが 2 点を獲得した時点で，2 点を獲得した方の勝利とする。たとえば，コインが表，裏，表，表と出た場合，この時点で A は 1 点，B は 2 点を獲得しているので B の勝利となる。

A，B あわせてちょうど n 回コインを投げ終えたときに A の勝利となる確率 $p(n)$ を求めよ。　[2013]

12　図のように，正三角形を 9 つの部屋に辺で区切り，部屋 P，Q を定める。1 つの球が部屋 P を出発し，1 秒ごとに，そのままその部屋にとどまることなく，辺を共有する隣の部屋に等確率で移動する。球が n 秒後に部屋 Q にある確率を求めよ。



[2012]

13　2 つの箱 L と R，ボール 30 個，コイン投げで表と裏が等確率 $\frac{1}{2}$ で出るコイン 1 枚を用意する。x を 0 以上 30 以下の整数とする。L に x 個，R に $30-x$ 個のボールを入れ，次の操作(♯)を繰り返す。

(♯)　箱 L に入っているボールの個数を z とする。コインを投げ，表が出れば箱 R から箱 L に，裏が出れば箱 L から箱 R に，$K(z)$ 個のボールを移す。ただし，$0 \leqq z \leqq 15$ のとき $K(z)=z$，$16 \leqq z \leqq 30$ のとき $K(z)=30-z$ とする。

m 回の操作の後，箱 L のボールの個数が 30 である確率を $P_m(x)$ とする。たとえば $P_1(15)=P_2(15)=\frac{1}{2}$ となる。以下の問(1), (2)に答えよ。

(1)　$m \geqq 2$ のとき，x に対してうまく y を選び，$P_m(x)$ を $P_{m-1}(y)$ で表せ。

(2)　n を自然数とするとき，$P_{2n}(10)$ を求めよ。　[2010]

14　スイッチを 1 回押すごとに，赤，青，黄，白のいずれかの色の玉が 1 個，等確率 $\frac{1}{4}$ で出てくる機械がある。2 つの箱 L と R を用意する。次の 3 種類の操作を考える。

(A)　1 回スイッチを押し，出てきた玉を L に入れる。

(B)　1 回スイッチを押し，出てきた玉を R に入れる。

(C)　1 回スイッチを押し，出てきた玉と同じ色の玉が，L になければその玉を L に入れ，L にあればその玉を R に入れる。

(1)　L と R は空であるとする。操作(A)を 5 回行い，さらに操作(B)を 5 回行う。このとき L にも R にも 4 色すべての玉が入っている確率 P_1 を求めよ。

(2)　L と R は空であるとする。操作(C)を 5 回行う。このとき L に 4 色すべての玉が入っている確率 P_2 を求めよ。

(3)　L と R は空であるとする。操作(C)を 10 回行う。このとき L にも R にも 4 色すべての玉が入っている確率を P_3 とする。$\frac{P_3}{P_1}$ を求めよ。　[2009]

15　白黒 2 種類のカードがたくさんある。そのうち 4 枚を手もとにもっているとき，次の操作(A)を考える。

(A)　手もちの 4 枚の中から 1 枚を，等確率$\frac{1}{4}$で選び出し，それを違う色のカードにとりかえる。

最初にもっている 4 枚のカードは，白黒それぞれ 2 枚であったとする。以下の(1)，(2)に答えよ。

(1)　操作(A)を 4 回繰り返した後に初めて，4 枚とも同じ色のカードになる確率を求めよ。

(2)　操作(A)を n 回繰り返した後に初めて，4 枚とも同じ色のカードになる確率を求めよ。　[2008]

16　表が出る確率が p，裏が出る確率が$1-p$ であるような硬貨がある。ただし，$0<p<1$とする。この硬貨を投げて，次のルール(R)の下で，ブロック積みゲームを行う。

(R)
① ブロックの高さは，最初は0とする。
② 硬貨を投げて表が出れば高さ1のブロックを1 つ積み上げ，裏が出ればブロックをすべて取り除いて高さ0 に戻す。

n を正の整数, m を $0\leqq m\leqq n$ を満たす整数とする。

(1)　n 回硬貨を投げたとき，最後にブロックの高さが m となる確率を求めよ。

(2)　(1)で，最後にブロックの高さが m 以下となる確率q_m を求めよ。

(3)　ルール(R)の下で，n 回硬貨投げを独立に 2 度行い，それぞれ最後のブロックの高さを考える。2 度のうち，高い方のブロックの高さが m である確率r_m を求めよ。ただし，最後のブロックの高さが等しいときはその値を考えるものとする。　[2007]

17　コンピュータの画面に，記号○と×のいずれかを表示させる操作をくり返し行う。このとき，各操作で，直前の記号と同じ記号を続けて表示する確率は，それまでの経過に関係なく, p であるとする。

最初に，コンピュータの画面に記号×が表示された。操作をくり返し行い，記号×が最初のものも含めて 3 個出るよりも前に，記号○が n 個出る確率をP_n とする。ただし，記号○が n 個出た段階で操作は終了する。

(1)　P_2 を p で表せ。

(2)　P_3 を p で表せ。

(3)　$n\geqq 4$ のとき，P_n を p と n で表せ。　[2006]

18　N を 1 以上の整数とする。数字 1, 2, …, N が書かれたカードを 1 枚ずつ，計 N 枚用意し，甲，乙の 2 人が次の手順でゲームを行う。

(i)　甲が 1 枚カードを引く。そのカードに書かれた数を a とする。引いたカードはもとに戻す。

(ii)　甲はもう 1 回カードを引くかどうかを選択する。引いた場合は，そのカードに書かれた数を b とする。引いたカードはもとに戻す。引かなかった場合は，$b=0$ とする。$a+b>N$ の場合は乙の勝ちとし，ゲームは終了する。

(iii)　$a+b \leqq N$ の場合は，乙が 1 枚カードを引く。そのカードに書かれた数を c とする。引いたカードはもとに戻す。$a+b<c$ の場合は乙の勝ちとし，ゲームは終了する。

(iv)　$a+b \geqq c$ の場合は，乙はもう 1 回カードを引く。そのカードに書かれた数を d とする。$a+b<c+d \leqq N$ の場合は乙の勝ちとし，それ以外の場合は甲の勝ちとする。

(ii)の段階で，甲にとってどちらの選択が有利であるかを，a の値に応じて考える。以下の問いに答えよ。

(1)　甲が 2 回目にカードを引かないことにしたとき，甲の勝つ確率を a を用いて表せ。

(2)　甲が 2 回目にカードを引くことにしたとき，甲の勝つ確率を a を用いて表せ。

ただし，各カードが引かれる確率は等しいものとする。　[2005]

19　片面を白色に，もう片面を黒色に塗った正方形の板が 3 枚ある。この 3 枚の板を机の上に横に並べ，次の操作をくり返し行う。

さいころを振り，出た目が 1, 2 であれば左端の板を裏返し，3, 4 であればまん中の板を裏返し，5, 6 であれば右端の板を裏返す。

たとえば，最初，板の表の色の並び方が「白白白」であったとし，1 回目の操作で出たさいころの目が 1 であれば，色の並び方は「黒白白」となる。さらに 2 回目の操作を行って出たさいころの目が 5 であれば，色の並び方は「黒白黒」となる。

(1)　「白白白」から始めて，3 回の操作の結果，色の並び方が「黒白白」となる確率を求めよ。

(2)　「白白白」から始めて，n 回の操作の結果，色の並び方が「黒白白」または「白黒白」または「白白黒」となる確率を p_n とする。p_{2k+1}（k は自然数）を求めよ。

注意：さいころは 1 から 6 までの目が等確率で出るものとする。　[2004]

20　さいころを振り，出た目の数で 17 を割った余りを X_1 とする。ただし，1 で割った余りは 0 である。

さらにさいころを振り，出た目の数で X_1 を割った余りを X_2 とする。以下同様にして，X_n が決まればさいころを振り，出た目の数で X_n を割った余りを X_{n+1} とする。

このようにして，X_n，$n=1,\ 2,\ \cdots$ を定める。

(1)　$X_3=0$ となる確率を求めよ。

(2)　各 n に対し，$X_n=5$ となる確率を求めよ。

(3)　各 n に対し，$X_n=1$ となる確率を求めよ。

注意：さいころは 1 から 6 までの目が等確率で出るものとする。　[2003]

21　コインを投げる試行の結果によって，数直線上にある 2 点 A, B を次のように動かす。

表が出た場合：点 A の座標が点 B の座標より大きいときは, A と B を共に正の方向に 1 動かす。そうでないときは, A のみ正の方向に 1 動かす。

裏が出た場合：点 B の座標が点 A の座標より大きいときは, A と B を共に正の方向に 1 動かす。そうでないときは, B のみ正の方向に 1 動かす。

最初 2 点 A, B は原点にあるものとし，上記の試行を n 回繰り返して A と B を動かしていった結果, A, B の到達した点の座標をそれぞれ a, b とする。

(1)　n 回コインを投げたときの表裏の出方の場合の数 2^n 通りのうち，$a=b$ となる場合の数を X_n とおく。X_{n+1} と X_n の間の関係式を求めよ。

(2)　X_n を求めよ。　[2001]

22　正四面体の各頂点を A_1, A_2, A_3, A_4 とする。ある頂点にいる動点 X は，同じ頂点にとどまることなく，1 秒ごとに他の 3 つの頂点に同じ確率で移動する。X が A_i に n 秒後に存在する確率を $P_i(n)$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ で表す。

$P_1(0)=\dfrac{1}{4}$，$P_2(0)=\dfrac{1}{2}$，$P_3(0)=\dfrac{1}{8}$，$P_4(0)=\dfrac{1}{8}$ とするとき，$P_1(n)$ と $P_2(n)$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ を求めよ。　[2000]

■ 論証

1 以下の命題 A, B それぞれに対し，その真偽を述べよ。また，真ならば証明を与え，偽ならば反例を与えよ。

命題 A　n が正の整数ならば，$\dfrac{n^3}{26}+100 \geqq n^2$ が成り立つ。

命題 B　整数 n, m, l が $5n+5m+3l=1$ を満たすならば，$10nm+3ml+3nl<0$ が成り立つ。 [2015]

2 円周上に m 個の赤い点と n 個の青い点を任意の順序に並べる。これらの点により，円周は $m+n$ 個の弧に分けられる。このとき，これらの弧のうち両端の点の色が異なるものの数は偶数であることを証明せよ。ただし，$m \geqq 1$, $n \geqq 1$ であるとする。

[2002]

3 白石 180 個と黒石 181 個の合わせて 361 個の碁石が横に一列に並んでいる。碁石がどのように並んでいても，次の条件を満たす黒の碁石が少なくとも 1 つあることを示せ。

その黒の碁石とそれより右にある碁石をすべて除くと，残りは白石と黒石が同数となる。ただし，碁石が 1 つも残らない場合も同数とみなす。 [2001]

分野別問題と解答例

関　数／微分と積分／図形と式

図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

問　題

以下の問いに答えよ。必要ならば，$0.3<\log_{10}2<0.31$ であることを用いてよい。

(1)　$5^n>10^{19}$ となる最小の自然数 n を求めよ。

(2)　$5^m+4^m>10^{19}$ となる最小の自然数 m を求めよ。　[2024]

解答例＋映像解説

(1)　$5^n>10^{19}$ ……①に対して，$\log_{10}5^n>\log_{10}10^{19}$ から $n\log_{10}\dfrac{10}{2}>19$ となり，

$$n(1-\log_{10}2)>19,\ n>\frac{19}{1-\log_{10}2}\ \cdots\cdots\cdots②$$

ここで，$0.3<\log_{10}2<0.31$ から，$0.69<1-\log_{10}2<0.7$ となり，

$$27.1<\frac{19}{1-\log_{10}2}<27.6$$

すると，②すなわち①を満たす最小の自然数 n は $n=28$ である。

(2)　(1)から $5^{28}>10^{19}$ なので，$5^m+4^m>10^{19}$ ……③は，$m=28$ で成立している。

そこで，$m=27$ のとき③が満たされてるかどうか，すなわち $5^{27}+4^{27}>10^{19}$ が成り立っているかどうかを調べる。

さて，$5^{27}+4^{27}=5^{27}\left\{1+\left(\dfrac{4}{5}\right)^{27}\right\}$ から，$\left(\dfrac{4}{5}\right)^{27}<\left(\dfrac{4}{5}\right)^{7}<\dfrac{1}{4}$ に注目すると，

$$5^{27}\left\{1+\left(\frac{4}{5}\right)^{27}\right\}<5^{27}\left(1+\frac{1}{4}\right)=\frac{5^{28}}{4},\ \log_{10}5^{27}\left\{1+\left(\frac{4}{5}\right)^{27}\right\}<\log_{10}\frac{5^{28}}{4}$$

すると，$\log_{10}\dfrac{5^{28}}{4}=28(1-\log_{10}2)-2\log_{10}2=28-30\log_{10}2$ から，

$$18.7<28-30\log_{10}2<19$$

よって，$\log_{10}5^{27}\left\{1+\left(\dfrac{4}{5}\right)^{27}\right\}<19$，すなわち $5^{27}+4^{27}<10^{19}$ から，$m=27$ では③は成り立っていない。

以上より，数列 $\{5^m+4^m\}$ は単調に増加するので，③を満たす最小の自然数 m は $m=28$ である。

コメント

対数計算と整数の融合問題です。(2)の考え方は，m が大きくなると 5^m は 4^m よりかなり大，言い換えると $\left(\dfrac{4}{5}\right)^m$ は 0 に近づいていくというイメージと，$\log_{10}2$ と相性のよい $\log_{10}4$，$\log_{10}5$ を結び付けたものです。

問　題

k を正の実数とし，2 次方程式 $x^2+x-k=0$ の 2 つの実数解を α，β とする。k が $k>2$ の範囲を動くとき，$\dfrac{\alpha^3}{1-\beta}+\dfrac{\beta^3}{1-\alpha}$ の最小値を求めよ。　[2023]

解答例＋映像解説

$k>0$ のとき，2 次方程式 $x^2+x-k=0$ の 2 つの実数解 α，β に対して，

$$\alpha+\beta=-1,\ \alpha\beta=-k,\ \alpha^2+\beta^2=(-1)^2-2(-k)=1+2k$$

ここで，$P=\dfrac{\alpha^3}{1-\beta}+\dfrac{\beta^3}{1-\alpha}$ とおき，k が $k>2$ の範囲を動くとき，

$$P=\frac{\alpha^3-\alpha^4+\beta^3-\beta^4}{(1-\alpha)(1-\beta)}=\frac{(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)-\{(\alpha^2+\beta^2)^2-2\alpha^2\beta^2\}}{1-(\alpha+\beta)+\alpha\beta}$$

$$=\frac{-1-3k-(1+4k+4k^2-2k^2)}{1+1-k}=\frac{-2-7k-2k^2}{2-k}=\frac{2k^2+7k+2}{k-2}$$

$$=\frac{(k-2)(2k+11)+24}{k-2}=2k+11+\frac{24}{k-2}=2(k-2)+\frac{24}{k-2}+15$$

さて，$k-2>0$ から，相加平均と相乗平均の関係を用いると，

$$P\geqq 2\sqrt{2(k-2)+\frac{24}{k-2}}+15=2\sqrt{48}+15=8\sqrt{3}+15$$

なお，等号は，$2(k-2)=\dfrac{24}{k-2}$ のとき，すなわち $(k-2)^2=12$ から $k-2=2\sqrt{3}$ となり，$k=2+2\sqrt{3}$ のときに成立する。

以上より，求める $P=\dfrac{\alpha^3}{1-\beta}+\dfrac{\beta^3}{1-\alpha}$ の最小値は，$8\sqrt{3}+15$ である。

コメント

分数式の最小値について，相加平均と相乗平均の関係を用いて求める基本題です。

問　題

座標平面上の点$(x,\ y)$が次の方程式を満たす。

$$2x^2+4xy+3y^2+4x+5y-4=0$$

このとき, xのとりうる最大の値を求めよ。 [2012]

解答例

条件式 $2x^2+4xy+3y^2+4x+5y-4=0$をyについてまとめると,

$$3y^2+(4x+5)y+(2x^2+4x-4)=0$$

yの実数条件から, xのとりうる範囲が決まり,

$$D=(4x+5)^2-12(2x^2+4x-4)=-8x^2-8x+73\geqq 0$$

これより, $8x^2+8x-73\leqq 0$となり, $\dfrac{-2-5\sqrt{6}}{4}\leqq x\leqq\dfrac{-2+5\sqrt{6}}{4}$

よって, xのとりうる最大の値は, $\dfrac{-2+5\sqrt{6}}{4}$である。

コメント

xとyが等式で関係づけられたときのxのとりうる範囲を求める基本題です。なお, 現在は範囲外ですが, 与えられた式は楕円を表します。

問　題

0 以上の実数 s, t が $s^2+t^2=1$ を満たしながら動くとき，方程式

$$x^4-2(s+t)x^2+(s-t)^2=0$$

の解のとる値の範囲を求めよ。 [2005]

解答例

$s \geqq 0$，$t \geqq 0$，$s^2+t^2=1$ のとき，$x^4-2(s+t)x^2+(s-t)^2=0$ ……①に対して，$x^2=X$ とおくと，①は，

$$X^2-2(s+t)X+(s-t)^2=0 \cdots\cdots\cdots ②$$

②の解 $X=\alpha$，β について，

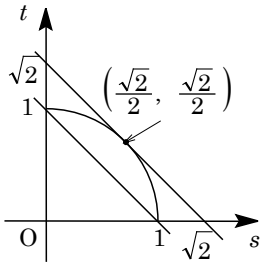
$$D/4=(s+t)^2-(s-t)^2=4st \geqq 0,\ \alpha+\beta=2(s+t) \geqq 0,\ \alpha\beta=(s-t)^2 \geqq 0$$

これより，②の 2 つの解はともに 0 以上であり，①の解はすべて実数となる。

さて，$s+t=u$ とすると，

$$(s-t)^2=2(s^2+t^2)-(s+t)^2=2-u^2$$

よって，①は，$x^4-2ux^2+(2-u^2)=0$ ……③となる。



また，u のとりうる値の範囲は，st 平面上において，右図の四分円と直線 $s+t=u$ が共有点をもつ条件から，$1 \leqq u \leqq \sqrt{2}$ である。

したがって，①の解 x のとる値の範囲は，③が $1 \leqq u \leqq \sqrt{2}$ に少なくとも 1 つの解をもつ x の条件として求められる。

③より，$u^2+2x^2u-2-x^4=0$ として，$f(u)=u^2+2x^2u-2-x^4$ とおくと，

$$f(0)=-2-x^4<0$$

また，$v=f(u)$ のグラフの軸は，$u=-x^2 \leqq 0$ より，求める条件は，

$$f(1)=1+2x^2-2-x^4 \leqq 0 \cdots\cdots\cdots ④$$

$$f(\sqrt{2})=2+2\sqrt{2}x^2-2-x^4 \geqq 0 \cdots\cdots\cdots ⑤$$

④より，$x^4-2x^2+1 \geqq 0$，$(x^2-1)^2 \geqq 0$ となり，つねに成立する。

⑤より，$x^4-2\sqrt{2}x^2 \leqq 0$，$x^2(x^2-2\sqrt{2}) \leqq 0$ より，$x^2-2\sqrt{2} \leqq 0$ となり，

$$x^2-2^{\frac{3}{2}} \leqq 0,\ -2^{\frac{3}{4}} \leqq x \leqq 2^{\frac{3}{4}}$$

以上より，①の解 x のとる値の範囲は，$-2^{\frac{3}{4}} \leqq x \leqq 2^{\frac{3}{4}}$ である。

コメント

後半，場合分けが必要かとも思いましたが，不要であるように式が設定されていました。

問　題

座標平面上で，放物線 $C: y=ax^2+bx+c$ が 2 点 $\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$，$\mathrm{Q}(-\cos\theta,\ \sin\theta)$ を通り，点 P と点 Q のそれぞれにおいて円 $x^2+y^2=1$ と共通の接線をもっている。ただし，$0^\circ<\theta<90^\circ$ とする。

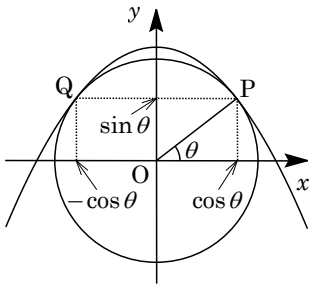
(1) a, b, c を $s=\sin\theta$ を用いて表せ。

(2) 放物線 C と x 軸で囲まれた図形の面積 A を s を用いて表せ。

(3) $A \geqq \sqrt{3}$ を示せ。 [2024]

解答例＋映像解説

(1) 放物線 $C: y=ax^2+bx+c$ ……①が，$\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$，$\mathrm{Q}(-\cos\theta,\ \sin\theta)$ $(0^\circ<\theta<90^\circ)$ を通ることより，



$$a\cos^2\theta+b\cos\theta+c=\sin\theta \cdots\cdots\cdots②$$

$$a\cos^2\theta-b\cos\theta+c=\sin\theta \cdots\cdots\cdots③$$

②③から，$b=0$ ……④，$c=\sin\theta-a\cos^2\theta$ ……⑤

すると，①から $C: y=ax^2+c$ となり，$y'=2ax$

これから，点 P における C の接線の方向ベクトル $\vec{u}$ は $\vec{u}=(1,\ 2a\cos\theta)$ と表せる。

さて，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(\cos\theta,\ \sin\theta)$ であり，点 P において C と円 $x^2+y^2=1$ が共通接線をもつことより，$\vec{u}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=0$ となり，

$$\cos\theta+2a\sin\theta\cos\theta=0,\ 1+2a\sin\theta=0$$

$s=\sin\theta$ とおくと，$a=-\dfrac{1}{2\sin\theta}=-\dfrac{1}{2s}$ ……⑥

なお，C と円 $x^2+y^2=1$ はともに y 軸に関して対称であるので，点 P において共通接線をもつと，点 Q においても共通接線をもつことになる。

よって，④⑤⑥から，$a=-\dfrac{1}{2s}$，$b=0$，$c=s-\left(-\dfrac{1}{2s}\right)(1-s^2)=\dfrac{s}{2}+\dfrac{1}{2s}$

(2) (1)から，$C: y=-\dfrac{1}{2s}x^2+\dfrac{s}{2}+\dfrac{1}{2s}=-\dfrac{1}{2s}(x^2-s^2-1)$ となり，C と x 軸との交点は，$x=\pm\sqrt{s^2+1}$ である。すると，C と x 軸で囲まれた図形の面積 A は，

$$A=-\frac{1}{2s}\int_{-\sqrt{s^2+1}}^{\sqrt{s^2+1}}\left(x+\sqrt{s^2+1}\right)\left(x-\sqrt{s^2+1}\right)dx$$

$$=-\frac{1}{2s}\left(-\frac{1}{6}\right)\left(2\sqrt{s^2+1}\right)^3=\frac{2}{3s}\left(\sqrt{s^2+1}\right)^3$$

(3) $A^2-3=\dfrac{4}{9s^2}(s^2+1)^3-3=\dfrac{4(s^6+3s^4+3s^2+1)-27s^2}{9s^2}=\dfrac{4s^6+12s^4-15s^2+4}{9s^2}$

ここで，$t=s^2$ とおくと，$0<s<1$ から $0<t<1$ である。

さらに，$f(t)=4t^3+12t^2-15t+4$ とおくと，

$$f'(t)=12t^2+24t-15$$
$$=3(2t-1)(2t+5)$$

$0<t<1$ における $f(t)$ の増減は右表のようになり，$f(t)\geqq 0$ である。

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	4	↘	0	↗	5

すると，$A^2-3=\dfrac{f(t)}{9t}\geqq 0$ となり，$A\geqq\sqrt{3}$ である。なお，等号は $t=\dfrac{1}{2}$，すなわち $s=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のときに成立する。

コメント

微積分の総合問題です。頻出の題材で，しかも難しめの計算もありません。

問　題

座標平面上の放物線 $y=3x^2-4x$ を C とおき，直線 $y=2x$ を l とおく。実数 t に対し，C 上の点 $\mathrm{P}(t,\ 3t^2-4t)$ と l の距離を $f(t)$ とする。

(1)　$-1 \leqq a \leqq 2$ の範囲の実数 a に対し，定積分 $g(a)=\displaystyle\int_{-1}^{a} f(t)dt$ を求めよ。

(2)　a が $0 \leqq a \leqq 2$ の範囲を動くとき，$g(a)-f(a)$ の最大値および最小値を求めよ。

[2023]

解答例＋映像解説

(1)　放物線 $C: y=3x^2-4x$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ 3t^2-4t)$ と直線 $l: 2x-y=0$ の距離 $f(t)$ は,

$$f(t)=\frac{\left|2t-(3t^2-4t)\right|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left|-3t^2+6t\right|=\frac{3}{\sqrt{5}}\left|t^2-2t\right|$$

さて，$-1 \leqq a \leqq 2$ のとき，$g(a)=\displaystyle\int_{-1}^{a} f(t)dt=\frac{3}{\sqrt{5}}\int_{-1}^{a}\left|t^2-2t\right|dt$ とおくと,

(i)　$-1 \leqq a < 0$ のとき

$$g(a)=\frac{3}{\sqrt{5}}\int_{-1}^{a}(t^2-2t)dt=\frac{3}{\sqrt{5}}\left[\frac{t^3}{3}-t^2\right]_{-1}^{a}=\frac{1}{\sqrt{5}}\{(a^3+1)-3(a^2-1)\}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{5}}(a^3-3a^2+4)$$

(ii)　$0 \leqq a \leqq 2$ のとき

$$g(a)=\frac{3}{\sqrt{5}}\int_{-1}^{0}(t^2-2t)dt+\frac{3}{\sqrt{5}}\int_{0}^{a}-(t^2-2t)dt$$
$$=\frac{3}{\sqrt{5}}\left[\frac{t^3}{3}-t^2\right]_{-1}^{0}-\frac{3}{\sqrt{5}}\left[\frac{t^3}{3}-t^2\right]_{0}^{a}=\frac{4}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{5}}(a^3-3a^2)$$
$$=-\frac{1}{\sqrt{5}}(a^3-3a^2-4)$$

(2)　$0 \leqq a \leqq 2$ のとき，$f(a)=\dfrac{3}{\sqrt{5}}\left|a^2-2a\right|=-\dfrac{3}{\sqrt{5}}(a^2-2a)$ となり，このとき，$h(a)=g(a)-f(a)$ とおくと，(1)から,

$$h(a)=-\frac{1}{\sqrt{5}}(a^3-3a^2-4)+\frac{3}{\sqrt{5}}(a^2-2a)=-\frac{1}{\sqrt{5}}(a^3-6a^2+6a-4)$$
$$h'(a)=-\frac{1}{\sqrt{5}}(3a^2-12a+6)=-\frac{3}{\sqrt{5}}(a^2-4a+2)$$

$h'(a)=0$ の解は $a=2\pm\sqrt{2}$ となり，$0 \leqq a \leqq 2$ における $h(a)$ の増減は右表のようになる。

a	0	$\cdots$	$2-\sqrt{2}$	$\cdots$	2
$h'(a)$		$-$	0	$+$	
$h(a)$	$\dfrac{4}{\sqrt{5}}$	↘		↗	$\dfrac{8}{\sqrt{5}}$

すると，最大値は $h(2)=\dfrac{8}{\sqrt{5}}$ である。

そして，最小値を求めるために，a^3-6a^2+6a-4 を a^2-4a+2 で割ると，

$$a^3-6a^2+6a-4=(a^2-4a+2)(a-2)-4a$$

これより，$a=2-\sqrt{2}$ のとき $a^3-6a^2+6a-4=-4(2-\sqrt{2})$ となり，最小値は，

$$h(2-\sqrt{2})=-\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot(-4)(2-\sqrt{2})=\frac{4}{\sqrt{5}}(2-\sqrt{2})$$

コメント

計算を主体とした微積分の総合問題です。上の解答例では記述を省きましたが，$y=\left|t^2-2t\right|$ のグラフを書いておくと，ミスが少なくなるでしょう。

問　題

$y=x^3-x$ により定まる座標平面上の曲線を C とする。C 上の点 $\mathrm{P}(\alpha,\ \alpha^3-\alpha)$ を通り，点 P における C の接線と垂直に交わる直線を l とする。C と l は相異なる 3 点で交わるとする。

(1)　α のとりうる値の範囲を求めよ。

(2)　C と l の点 P 以外の 2 つの交点の x 座標を β，γ とする。ただし，$\beta<\gamma$ とする。$\beta^2+\beta\gamma+\gamma^2-1\neq 0$ となることを示せ。

(3)　(2)の β，γ を用いて，$u=4\alpha^3+\dfrac{1}{\beta^2+\beta\gamma+\gamma^2-1}$ と定める。このとき，u のとりうる値の範囲を求めよ。　[2022]

解答例＋映像解説

(1)　曲線 $C: y=x^3-x$ ……①に対して，$y'=3x^2-1$ となり，C 上の点 $\mathrm{P}(\alpha,\ \alpha^3-\alpha)$ における法線 l の方程式は，その法線ベクトルの成分を $(1,\ 3\alpha^2-1)$ として，

$$(x-\alpha)+(3\alpha^2-1)(y-\alpha^3+\alpha)=0 \cdots\cdots\cdots ②$$

①②を連立すると，$(x-\alpha)+(3\alpha^2-1)(x^3-x-\alpha^3+\alpha)=0$ となり，

$$(x-\alpha)+(3\alpha^2-1)\{(x-\alpha)(x^2+\alpha x+\alpha^2)-(x-\alpha)\}=0$$

$$(x-\alpha)\{1+(3\alpha^2-1)(x^2+\alpha x+\alpha^2-1)\}=0$$

$$(x-\alpha)\{(3\alpha^2-1)x^2+(3\alpha^2-1)\alpha x+3\alpha^4-4\alpha^2+2\}=0$$

$$x=\alpha,\ (3\alpha^2-1)x^2+(3\alpha^2-1)\alpha x+3\alpha^4-4\alpha^2+2=0 \cdots\cdots\cdots ③$$

さて，C と l は相異なる 3 点で交わるので，③は $x\neq\alpha$ の異なる 2 実数解をもち，

$$3\alpha^2-1\neq 0 \cdots\cdots ④,\ (3\alpha^2-1)\alpha^2+(3\alpha^2-1)\alpha^2+3\alpha^4-4\alpha^2+2\neq 0 \cdots\cdots ⑤$$

$$D=(3\alpha^2-1)^2\alpha^2-4(3\alpha^2-1)(3\alpha^4-4\alpha^2+2)>0 \cdots\cdots\cdots ⑥$$

④より，$\alpha\neq\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ から $\alpha\neq\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ となる。

⑤をまとめると，$9\alpha^4-6\alpha^2+2\neq 0$ となり，$(3\alpha^2-1)^2+1>0$ から成立する。

⑥より，$(3\alpha^2-1)\{(3\alpha^2-1)\alpha^2-4(3\alpha^4-4\alpha^2+2)\}>0$ となり，

$$(3\alpha^2-1)(9\alpha^4-15\alpha^2+8)<0,\ (3\alpha^2-1)\left\{\left(3\alpha^2-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{7}{4}\right\}<0$$

すると，$3\alpha^2-1<0$ から $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}<\alpha<\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ となり，④を満たす。

よって，α のとりうる値の範囲は，$-\dfrac{\sqrt{3}}{3}<\alpha<\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ である。

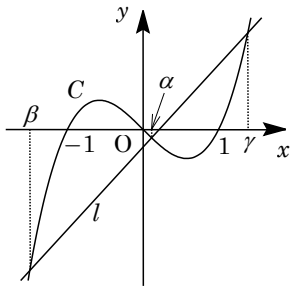
(2) ③の実数解が $x=\beta,\ \gamma\ (\beta<\gamma)$ より，$\beta+\gamma=-\alpha$，

$\beta\gamma=\dfrac{3\alpha^4-4\alpha^2+2}{3\alpha^2-1}$ であるので，

$$\beta^2+\beta\gamma+\gamma^2-1=(\beta+\gamma)^2-\beta\gamma-1$$

$$=\alpha^2-\frac{3\alpha^4-4\alpha^2+2}{3\alpha^2-1}-1=-\frac{1}{3\alpha^2-1}$$

よって，$\beta^2+\beta\gamma+\gamma^2-1\neq 0$ となる。



(3) $u=4\alpha^3+\dfrac{1}{\beta^2+\beta\gamma+\gamma^2-1}=4\alpha^3-(3\alpha^2-1)=4\alpha^3-3\alpha^2+1$ から，

$$u'=12\alpha^2-6\alpha$$
$$=6\alpha(2\alpha-1)$$

すると，$-\dfrac{\sqrt{3}}{3}<\alpha<\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ における u の増減は右表のようになり，u のとりうる値の範囲は，$-\dfrac{4}{9}\sqrt{3}<u\leqq 1$ である。

α	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
u'		$+$	0	$-$	0	$+$	
u	$-\frac{4}{9}\sqrt{3}$	↗	1	↘	$\frac{3}{4}$	↗	$\frac{4}{9}\sqrt{3}$

コメント

計算量が多めの微分の応用問題です。(1)では，法線の法線ベクトルとして，接線の方向ベクトルを流用し，少し工夫をしています。

問　題

a を正の実数とする。座標平面上の曲線 C を $y=ax^3-2x$ で定める。原点を中心とする半径 1 の円と C の共有点の個数が 6 個であるような a の範囲を求めよ。 [2021]

解答例＋映像解説

曲線 $C: y=ax^3-2x\ (a>0)$ ……①と円: $x^2+y^2=1$ ……②を連立して,

$$x^2+(ax^3-2x)^2=1,\ a^2x^6-4ax^4+5x^2-1=0 \cdots\cdots\cdots ③$$

曲線①と円②の共有点の個数が 6 個である条件は, ③は 6 個の実数解をもつことに対応し, さらに $x=0$ が③の解でないことに注意して, $x^2=t>0$ とおくと, ③より,

$$a^2t^3-4at^2+5t-1=0 \cdots\cdots\cdots ④$$

すると, $x=\pm\sqrt{t}$ から, 求める条件は, ④が 3 個の正の実数解をもつことになる。

ここで, $f(t)=a^2t^3-4at^2+5t-1$ とおくと,

$$f'(t)=3a^2t^2-8at+5$$
$$=(at-1)(3at-5)$$

これより, $f(t)$ の増減は右表のようになり, 求める条件は,

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{a}$	$\cdots$	$\frac{5}{3a}$	$\cdots$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(t)$	-1	↗		↘		↗

$$f\left(\frac{1}{a}\right)>0 \cdots\cdots\cdots ⑤,\ f\left(\frac{5}{3a}\right)<0 \cdots\cdots\cdots ⑥$$

⑤より, $\frac{1}{a}-\frac{4}{a}+\frac{5}{a}-1<0$ となり, $\frac{2}{a}>1$ から $a<2$

⑥より, $\frac{125}{27a}-\frac{100}{9a}+\frac{25}{3a}-1<0$ となり, $\frac{50}{27a}<1$ から $a>\frac{50}{27}$

以上より, 求める a の範囲は $\frac{50}{27}<a<2$ である。

コメント

曲線と円の共有点の個数についての基本的な問題です。方程式の実数解の個数に言い換える方針で解の流れができ, しかも導関数がうまく因数分解できるというオマケも付いています。

問　題

$a>0$，$b>0$ とする。座標平面上の曲線 $C: y=x^3-3ax^2+b$ が，以下の 2 条件を満たすとする。

条件 1：C は x 軸に接する。

条件 2：x 軸と C で囲まれた領域（境界は含まない）に，x 座標と y 座標がともに整数である点がちょうど 1 個ある。

b を a で表し，a のとりうる値の範囲を求めよ。　[2020]

解答例＋映像解説

曲線 $C: y=x^3-3ax^2+b$ $(a>0,\ b>0)$ ……①に対して，

$$y'=3x^2-6ax=3x(x-2a)$$

すると，y の増減は右表のようになり，

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$2a$	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	b	↘	$-4a^3+b$	↗

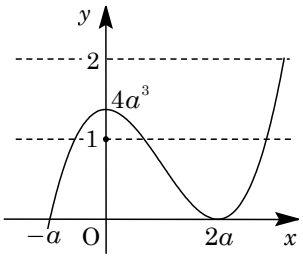
$b>0$ に注意すると，条件 1 から，

$$-4a^3+b=0,\ b=4a^3 \cdots\cdots\cdots②$$

①②から，$C: y=x^3-3ax^2+4a^3$ ……③となり，

$$y=(x+a)(x-2a)^2$$

これより，C の概形は右図のようになる。



ここで，x 軸と C で囲まれた領域（境界は含まない）を R とおくと，R の範囲は $0<y<4a^3$ である。

さて，条件 2 から，R に格子点が含まれるためには $1<4a^3$，しかも 1 個だけということから $4a^3 \leqq 2$ が必要になる。まとめると，$1<4a^3 \leqq 2$ であることが必要となり，

$$\frac{1}{4}<a^3 \leqq \frac{1}{2},\ \frac{1}{\sqrt[3]{4}}<a \leqq \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \cdots\cdots\cdots④$$

このとき，R には格子点 $(0,\ 1)$ が含まれ，$\frac{1}{2}<\frac{\sqrt[3]{2}}{2}=\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$，$\frac{1}{\sqrt[3]{2}}=\frac{\sqrt[3]{4}}{2}<\frac{\sqrt{3}}{2}$ から，④が成り立つとき $\frac{1}{2}<a<\frac{\sqrt{3}}{2}$ となり，これより領域 R の範囲は，

$$-1<-\frac{\sqrt{3}}{2}<-a<x<2a<\sqrt{3}<2$$

そこで，④のもとで，R に含まれる格子点が $(0,\ 1)$ だけかどうかを判断するために，以下，直線 $x=1$ 上の格子点 $(1,\ 1)$ と R の関係を調べてみる。

ここで，③の右辺を $f(x)=x^3-3ax^2+4a^3$ とおくと，

$$f(1)-1=(1-3a+4a^3)-1=4a^3-3a=a(2a+\sqrt{3})(2a-\sqrt{3})<0$$

よって，$f(1)<1$ から格子点 $(1,\ 1)$ は R に含まれない。

以上より，求める条件は④となり，a の範囲は $\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}} < a \leqq \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$ である。

コメント

3 次曲線を題材とし，格子点を絡ませた問題です。必要条件④を求めた後の解法はいろいろ考えられますが，ここでは R の範囲から $x=1$ 上の格子点に絞って調べ，十分性を確認しています。記述しにくい問題です。

問　題

$a>0$ とし，$f(x)=x^3-3a^2x$ とおく。

(1)　$x \geqq 1$ で $f(x)$ が単調に増加するための，a についての条件を求めよ。

(2)　次の 2 条件を満たす点 $(a,\ b)$ の動きうる範囲を求め，座標平面上に図示せよ。

条件 1：方程式 $f(x)=b$ は相異なる 3 実数解をもつ。

条件 2：さらに，方程式 $f(x)=b$ の解を $\alpha<\beta<\gamma$ とすると $\beta>1$ である。

[2018]

解答例＋映像解説

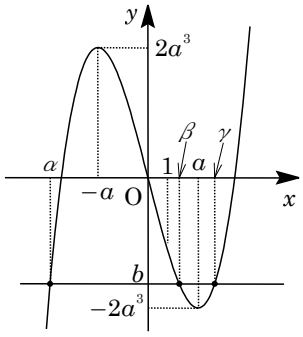
(1)　$f(x)=x^3-3a^2x\quad(a>0)$ に対して，$f'(x)=3x^2-3a^2=3(x+a)(x-a)$

これより，$f(x)$ の増減は右表のようになる。

x	$\cdots$	$-a$	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$2a^3$	↘	$-2a^3$	↗

すると，$x \geqq 1$ で $f(x)$ が単調に増加する条件は，$0<a \leqq 1$ である。

(2)　方程式 $f(x)=b$ は相異なる 3 実数解をもち，その解を $\alpha<\beta<\gamma$ とすると，$\alpha<-a<\beta<a<\gamma$ であり，しかも $\beta>1$ である条件は，右図から，



$a>1$ ……①

$-2a^3<b<f(1)=1-3a^2$ ……②

ここで，②の 2 つの境界線 $b=-2a^3$ と $b=1-3a^2$ の関係は，両式を連立すると，

$-2a^3=1-3a^2$，$2a^3-3a^2+1=0$

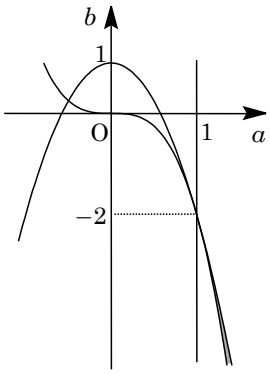
$(2a+1)(a-1)^2=0$

よって，$a=-\dfrac{1}{2}$ で交わり，$a=1$ で接する。

以上より，点 $(a,\ b)$ の動きうる範囲は，①②から，

$a>1$，$-2a^3<b<1-3a^2$

この不等式を ab 平面上に図示すると，右図の網点部になる。ただし，境界は領域に含まない。



コメント

微分の方程式への応用問題です。内容は基本的です。

問　題

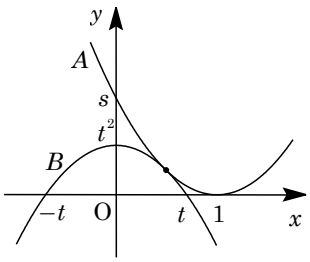
座標平面において 2 つの放物線 $A: y=s(x-1)^2$ と $B: y=-x^2+t^2$ を考える。ただし s, t は実数で，$0<s$，$0<t<1$ を満たすとする。放物線 A と x 軸および y 軸で囲まれる領域の面積を P とし，放物線 B の $x \geqq 0$ の部分と x 軸および y 軸で囲まれる領域の面積を Q とする。A と B がただ 1 点を共有するとき，$\dfrac{Q}{P}$ の最大値を求めよ。

[2017]

解答例

放物線 $A: y=s(x-1)^2$ と $B: y=-x^2+t^2$ を連立して，

$$s(x-1)^2=-x^2+t^2,\ (s+1)x^2-2sx+s-t^2=0$$



$0<s$，$0<t<1$ で，A と B が 1 点を共有することより，

$$D/4=s^2-(s+1)(s-t^2)=0,\ (t^2-1)s+t^2=0$$

よって，$s=\dfrac{t^2}{1-t^2}$ ……(＊)

さて，A と x 軸および y 軸で囲まれる領域の面積 P は，

$$P=\int_0^1 s(x-1)^2dx=\left[\frac{s}{3}(x-1)^3\right]_0^1=\frac{s}{3}$$

また，B の $x \geqq 0$ の部分と x 軸および y 軸で囲まれる領域の面積 Q は，

$$Q=\int_0^t(-x^2+t^2)dx=\left[-\frac{x^3}{3}+t^2x\right]_0^t=-\frac{t^3}{3}+t^3=\frac{2}{3}t^3$$

すると，$\dfrac{Q}{P}=\dfrac{2}{3}t^3\cdot\dfrac{3}{s}=\dfrac{2t^3}{s}$ となり，(＊)を代入すると，

$$\frac{Q}{P}=2t^3\cdot\frac{1-t^2}{t^2}=2t(1-t^2)=2t-2t^3$$

ここで，$f(t)=2t-2t^3\ (0<t<1)$ とおくと，

$$f'(t)=2-6t^2=-2(3t^2-1)$$

これより，$f(t)$ の増減は右表のようになり，$t=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ で最大となる。

t	0	…	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	…	1
$f'(t)$		＋	0	－	
$f(t)$		↗		↘	

よって，$\dfrac{Q}{P}=f(t)$ の最大値は，$2\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(1-\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{4}{3\sqrt{3}}=\dfrac{4}{9}\sqrt{3}$ である。

コメント

微積分の融合した基本問題です。計算も易しめです。

問　題

座標平面上の 2 つの放物線 $A: y=x^2$，$B: y=-x^2+px+q$ が点 $(-1,\ 1)$ で接している。ここで，p と q は実数である。さらに，t を正の実数とし，放物線 B を x 軸の正の向きに $2t$，y 軸の正の向きに t だけ平行移動して得られる放物線を C とする。

(1)　p と q の値を求めよ。

(2)　放物線 A と C が囲む領域の面積を $S(t)$ とする。ただし，A と C が領域を囲まないときは $S(t)=0$ と定める。$S(t)$ を求めよ。

(3)　$t>0$ における $S(t)$ の最大値を求めよ。　[2016]

解答例

(1)　放物線 $A: y=x^2$ ……①，$B: y=-x^2+px+q$ ……②

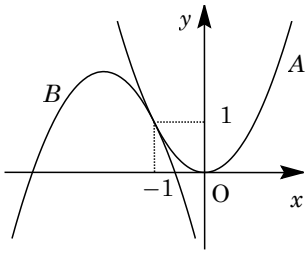
に対して，①②を連立すると，

$$x^2=-x^2+px+q,\ 2x^2-px-q=0 \cdots\cdots\cdots ③$$

A と B が点 $(-1,\ 1)$ で接していることより，③から，

$$D=p^2+8q=0,\ x=\frac{p}{4}=-1$$

よって，$p=-4$，$q=-2$



(2)　(1)より，$B: y=-x^2-4x-2$ となり，$t>0$ のとき，放物線 B を x 軸の正の向きに $2t$，y 軸の正の向きに t だけ平行移動して得られる放物線 C は，

$$y-t=-(x-2t)^2-4(x-2t)-2$$

$$y=-x^2+(4t-4)x-4t^2+9t-2 \cdots\cdots\cdots ④$$

そこで，①④を連立すると，$x^2=-x^2+(4t-4)x-4t^2+9t-2$ から

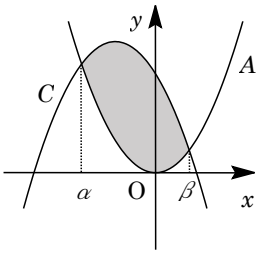
$$2x^2-(4t-4)x+4t^2-9t+2=0 \cdots\cdots\cdots ⑤$$

ここで，⑤から $D/4=(2t^2-2)-2(4t^2-9t+2)=-4t^2+10t$ なので，

(i)　$-4t^2+10t>0\ \left(0<t<\dfrac{5}{2}\right)$ のとき　⑤から交点は，

$$x=\frac{2t-2\pm\sqrt{-4t^2+10t}}{2}$$

この値を $x=\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ とおくと，A と C が囲む領域の面積 $S(t)$ は，



$$S(t)=\int_\alpha^\beta \{-x^2+(4t-4)x-4t^2+9t-2-x^2\}dx$$

$$=\int_\alpha^\beta -2(x-\alpha)(x-\beta)dx=\frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{3}(-4t^2+10t)^{\frac{3}{2}}$$

(ii)　$-4t^2+10t\leqq 0\ \left(t\geqq\dfrac{5}{2}\right)$ のとき　A と C は領域を囲まないので，$S(t)=0$

(3)　(2)より，$-4t^2+10t=-4\left(t-\dfrac{5}{4}\right)^2+\dfrac{25}{4}$ であり，$S(t)$ は $t>0$ で連続なので，

$t=\dfrac{5}{4}$ のとき最大となる。その最大値は，

$$S\left(\frac{5}{4}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{25}{4}\right)^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{3}\cdot\frac{125}{8}=\frac{125}{24}$$

コメント

定積分と面積について，センター試験でよく問われるタイプの基本題です。